

می‌دانیم $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ است، پس:

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 6 \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 6 \Rightarrow \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 6 \quad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1) - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \quad (۲)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$\frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 6 \Rightarrow 6\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\left(\frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

حال به کمک رابطه (۲) داریم:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

چون $\frac{\pi}{4} < \alpha < \beta < \pi$ ، پس اولاً باید $-1 < \cos \alpha < 0$ و $-1 < \cos \beta < 0$ باشد، ثانیاً باید $\cos \alpha > \cos \beta$ باشد. (زیرا تابع $y = \cos x$ در ناحیه دوم دایره مثلثاتی،

تابعی اکیداً نزولی است و با افزایش مقادیر x ، مقادیر $\cos x$ کاهش می‌یابد.)

$$۱ \text{ شرط: } -1 < \cos \alpha < 0 \Rightarrow -1 < \frac{1}{2m+1} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2m+1} < 0 \Rightarrow 2m+1 < 0 \\ \frac{1}{2m+1} > -1 \Rightarrow \frac{2m+2}{2m+1} > 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \quad (۱) \\ m < -1 \text{ یا } m > -\frac{1}{2} \quad (۲) \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک (۱), (۲)}} m < -1 \quad (۳)$$

$$۲ \text{ شرط: } -1 < \cos \beta < 0 \Rightarrow -1 < \frac{2}{m+1} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{m+1} < 0 \Rightarrow m+1 < 0 \\ \frac{2}{m+1} > -1 \Rightarrow \frac{m+3}{m+1} > 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} m < -1 \quad (۴) \\ m < -3 \text{ یا } m > -1 \quad (۵) \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک (۴), (۵)}} m < -3 \quad (۶)$$

$$۳ \text{ شرط: } \cos \alpha > \cos \beta \Rightarrow \frac{1}{2m+1} > \frac{2}{m+1} \Rightarrow \frac{1}{2m+1} - \frac{2}{m+1} > 0 \Rightarrow \frac{m+1-4m-2}{(2m+1)(m+1)} > 0 \Rightarrow \frac{-3m-1}{(2m+1)(m+1)} > 0$$

		-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	
$-3m-1$	+	+	+	○	-
$(2m+1)(m+1)$	+	○	-	+	+
کل عبارت	+	-	-	+	-

$$مجموعه جواب: m < -1 \text{ یا } -\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{3} \quad (۷)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (۳), (۶), (۷)}} m < -3$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

تابع $ho(fog)(x)$ را به دست آورید.

$$fog(x) = \sin ax \Rightarrow ho(fog)(x) = b^x \sin ax - 1$$

دوره تناوب تابع با توجه به نمودار 6π و ماکزیمم آن ۱ است.

$$T = \frac{2\pi}{|a|} = 6\pi \Rightarrow |a| = \frac{1}{3} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{1}{3}$$

(تابع در $X=0$ نزولی است، بنابراین $ab^x < 0$ در نتیجه $a < 0$ است.)

$$\max = |b^x| - 1 = 1 \Rightarrow b^x = 2$$

خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sin x \\ g(x) = -\frac{x}{3} \\ h(x) = 2x - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow hof(x) = 2 \sin x - 1 \Rightarrow go(hof)(x) = -\frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3}$$

بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \min = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \\ \max = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow R_{go(hof)} = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

دو طرف تساوی داده شده را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$\sin^{\frac{2}{3}} \alpha + \cos^{\frac{2}{3}} \alpha = 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \sin^{\frac{2}{3}} \alpha + \cos^{\frac{2}{3}} \alpha + 3 \sin^{\frac{2}{3}} \alpha \cos^{\frac{2}{3}} \alpha (\sin^{\frac{2}{3}} \alpha + \cos^{\frac{2}{3}} \alpha) = 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow 1 + 3(\sin \alpha \cos \alpha)^{\frac{2}{3}} (2^{\frac{2}{3}}) = 4$$

$$\Rightarrow 3(k)^{\frac{2}{3}} (2^{\frac{2}{3}}) = 3 \Rightarrow (2k)^{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$k + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + 2 = 2.5$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵

$$\sqrt{3} \sin^2(x - 2\pi) - \sqrt{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = \sqrt{3}$$

حال طرفین رابطه فوق را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

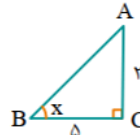
$$\frac{\sqrt{3} \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sqrt{3} \sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} \xrightarrow{1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}} \sqrt{3} \tan^2 x + \sqrt{3} \tan x = \sqrt{3}(1 + \tan^2 x)$$

$$\Rightarrow \Delta \tan^2 x + \sqrt{3} \tan x - \sqrt{3} = 0 \xrightarrow{a+c=b} \left\{ \begin{array}{l} \tan x = -1 \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{\pi < x < \frac{3\pi}{2} \\ \tan x > 0}} \text{غ ق ق}$$

حال به کمک مثلث قائم الزاویه مقابل، داریم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

$$|\sin x| = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{29}} \xrightarrow{\substack{\pi < x < \frac{3\pi}{2} \\ \sin x < 0}} \sin x = -\frac{2}{\sqrt{29}}$$



$$\therefore \quad \quad \quad BC \quad \quad \Delta \quad \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2} \quad \quad \Delta$$

$$\sin x \cos x = \left(-\frac{2}{\sqrt{29}}\right)\left(-\frac{5}{\sqrt{29}}\right) = \frac{10}{29}$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$(1 - \cos \frac{\pi}{9}) \tan \frac{4\pi}{9} = (\sqrt{3} \sin^2 \frac{\pi}{18}) \left(\tan \frac{4\pi}{18} \right) = \sqrt{3} \sin^2 \frac{\pi}{18} \cot \frac{\pi}{18} = \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{18} \cos \frac{\pi}{18} = \sin \frac{\pi}{9}$$

عبارت را ساده می‌کنیم:

۶

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$(\sin x - \cos x)^2 = k^2 \Rightarrow 1 - \sin 2x = k^2 \Rightarrow \sin 2x = 1 - k^2$$

دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

۷

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4} (1 - k^2)^2 = \frac{3}{4} k^2 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{4} + k^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow k^2 + 4k^2 - 3 = 0 \Rightarrow (k^2 + 3)(k^2 - 1) = 0 \Rightarrow k^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 1 - k^2 = 0$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1$$

خواهیم داشت:

پس گزینه ۴ صحیح است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$\sin^2\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 bx = \frac{1 + \cos 2bx}{2} \Rightarrow f(x) = a\left(\frac{1 + \cos 2bx}{2}\right) + c = \frac{a}{2} \cos 2bx + \frac{a}{2} + c$$

$$\text{دوره تناوب} = T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

با توجه به اینکه نمودار در $x=0$ دارای $\min$ است، $\frac{a}{2}$ منفی بوده و در نتیجه $a < 0$ است.

$$\max = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + c + \left|\frac{a}{2}\right| = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + c - \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\min = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} + c - \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} + c + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a + c = \frac{1}{2} \Rightarrow a + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} a + b + c = \frac{1}{2} \\ a + b + c = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: معادله خطی که با جهت مثبت محور x زاویه θ می‌سازد و از دو نقطه (x_0, y_0) می‌گذرد، عبارت است از:

$$y - y_0 = \tan \theta (x - x_0)$$

ابتدا شکل را نام‌گذاری می‌کنیم:

 $\hat{B}_1$ و $\hat{B}_2$ متقابل به رأس‌اند، پس:

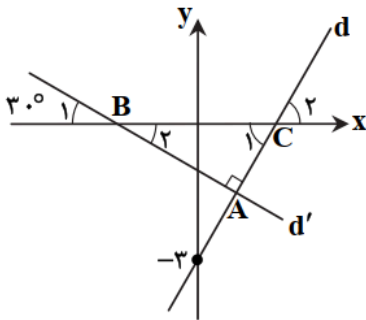
$$\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 30^\circ$$

حال در مثلث ABC داریم:

$$\hat{C}_1 = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}_2 = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

حال از متقابل به رأس بودن $\hat{C}_1$ و $\hat{C}_2$ نتیجه می‌شود: $\hat{C}_2 = \hat{C}_1 = 60^\circ$ اکنون چون خط d با شیب $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ از نقطه $(0, -3)$ می‌گذرد، معادله آن عبارت است از:

$$y - (-3) = \sqrt{3}(x - 0) \Rightarrow y + 3 = \sqrt{3}x \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 3$$



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\text{نکته: } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

راه حل اول:

$$A = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(1 + \sin x)\cos x} = \frac{1 + \sin x}{(1 + \sin x)\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

راه حل دوم:

صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cancel{\cos x}(1 - \sin x)}{\cancel{\cos x}^2} + \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{(1 - \sin x)}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\cos x}} + \frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\cos x}} = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱

نکته: مقدار تابع $y = \sin x$ در طول‌های $x = k\pi$ برابر صفر است. ($k \in \mathbb{Z}$)

نکته: برد تابع $y = \sin x$ برابر $[-1, 1]$ است.

برد تابع $y = \sin(x + a\pi)$ برابر $[-1, 1]$ است، طبق نمودار برد تابع $y = b + \sin(x + a\pi)$ برابر $[-2, 0]$ است، پس $b = -1$. بنابراین ضابطه تابع به صورت $y = -1 + \sin(x + a\pi)$ است. از طرفی چون $\sin \pi = 0$ ، با توجه به نمودار از اینکه $y = -1 + \sin(x + a\pi)$ در

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ برابر } -1 \text{ است، نتیجه می‌گیریم } \frac{3\pi}{4} + a\pi = \pi \text{، پس } a\pi = \frac{\pi}{4} \text{، بنابراین } a = \frac{1}{4} \text{ در نتیجه:}$$

$$4a - b = 1 - (-1) = 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۲

راه حل اول:

$$\text{نکته: } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{نکته: } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

اگر $\frac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha$ را A بنامیم، با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha \\ 2A = \left(\frac{1}{\cos \alpha}\right)^2 - (\tan \alpha)^2 \Rightarrow 2A = (1 + \tan^2 \alpha) - \tan^2 \alpha \Rightarrow 2A = 1 \\ \Rightarrow A = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{طرفین را در هم ضرب می‌کنیم.}}$$

راه حل دوم:

$$\text{نکته: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$B = \frac{1}{\cos \alpha} + \tan \alpha = 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \Rightarrow \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$$

$$A = \frac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$AB = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1$$

بنابراین:

$$A = \frac{1}{B} = \frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۳

نکته: $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$

$$\sqrt{u^2} = |u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases} \quad \text{نکته:}$$

برای ساده شدن رادیکال‌ها، صورت و مخرج هر کسر را در مزدوج مخرج آن ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{(1 + \cos \alpha)^2}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}} - \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{(1 + \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 + \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} = \left| \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right| - \left| \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right| \end{aligned}$$

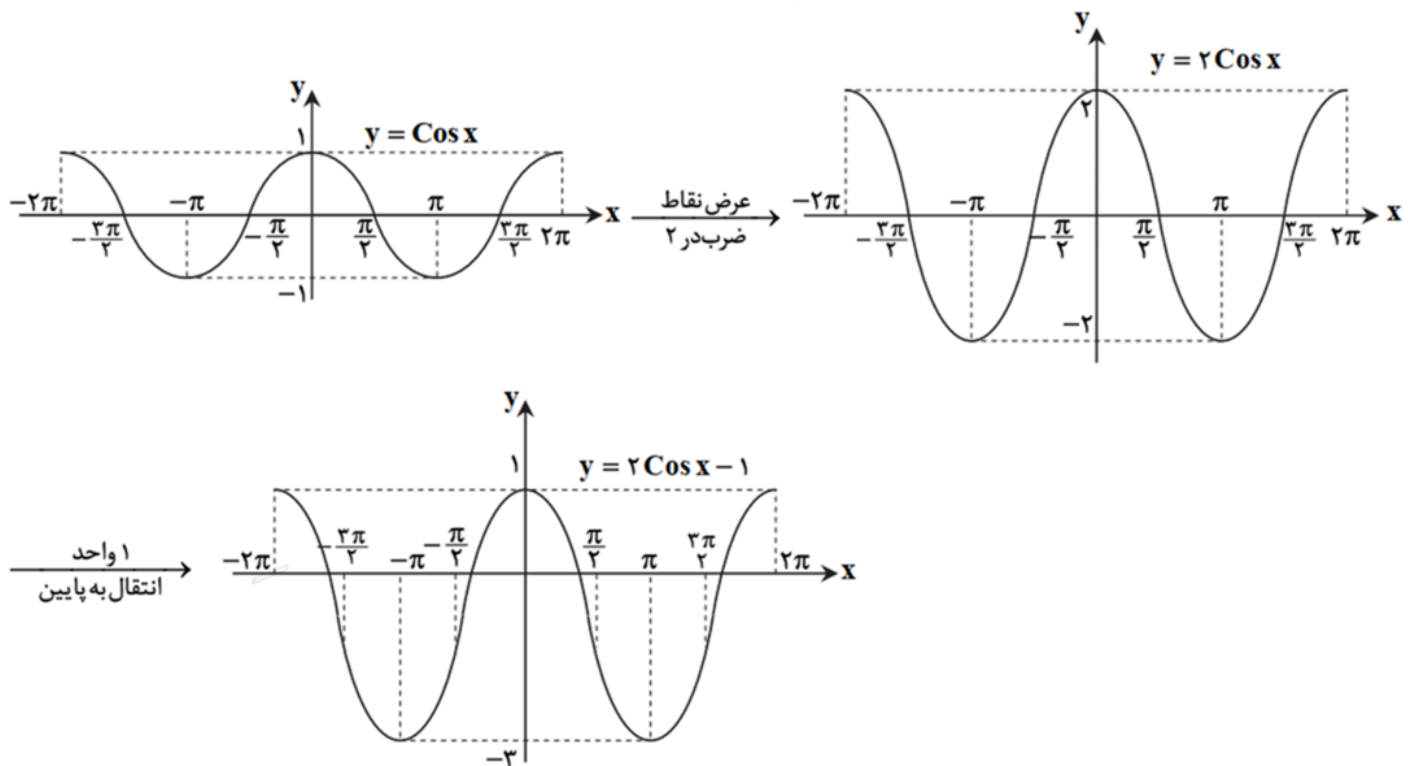
چون $1 \leq \cos \alpha \leq 1$ ، پس $1 - \cos \alpha \geq 0$ و $1 + \cos \alpha \geq 0$. از طرفی چون α در ربع اول یا دوم قرار دارد، $\sin \alpha > 0$. بنابراین:

$$A = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha - 1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cot \alpha$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴

ابتدا نمودار تابع $y = 2 \cos x - 1$ را با کمک انتقال رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تنها خط $y = -3$ نمودار تابع را دقیقاً در دو نقطه قطع می‌کند، پس فقط یک مقدار برای k وجود دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

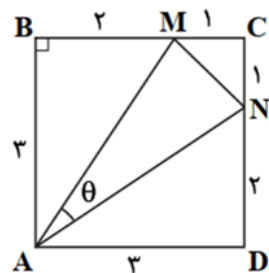
۱۵

نکته: مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{B}$$

با توجه به شکل زیر، مساحت مثلث AMN قابل محاسبه است.

$$S_{AMN} = S_{ABCD} - (S_{ABM} + S_{MCN} + S_{AND}) = 3 \times 3 - \left(\frac{2 \times 3}{2} + \frac{1 \times 1}{2} + \frac{2 \times 3}{2} \right) \Rightarrow S_{AMN} = 9 - \left(\frac{13}{2} \right) = \frac{5}{2} \quad (*)$$

از طرفی طبق رابطه فیثاغورس در مثلث‌های ABM و AND داریم:

$$AM = AN = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \times AM \times AN \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{13} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 13 \times \sin \theta$$

$$\frac{13}{2} \sin \theta = \frac{5}{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{5}{13}$$

حال با توجه به (*) داریم:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۶

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{نکته:}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{نکته:}$$

اگر $\cos x = 0$ ، رابطه داده شده برقرار نیست، پس $\cos x \neq 0$.اکنون طرفین رابطه را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{6 \sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{2}{\cos^2 x}$$

$$1 + \tan^2 x - 6 \tan x - 1 = -2(1 + \tan^2 x) \Rightarrow 1 \tan^2 x - 6 \tan x + 1 = 0 \Rightarrow (3 \tan x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cot x = 3$$

اکنون حاصل $\sin x \cos x$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{3} + 3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{10}{3} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{3}{10}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

نکته : $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

طرفین رابطه $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ را یک بار به توان ۲ و یک بار به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1 \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \quad (I)$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 1 \Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1) = 1$$

$$\Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \quad (II)$$

اکنون طرفین رابطه (I) و (II) را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^6 x + \cos^6 x) = (1 - 2\sin^2 x \cos^2 x)(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x)$$

$$\Rightarrow \sin^{10} x + \sin^4 x \cos^6 x + \cos^6 x \sin^4 x + \cos^{10} x = 1 - 5\sin^2 x \cos^2 x + 6\sin^4 x \cos^4 x$$

$$\Rightarrow \sin^{10} x + \cos^{10} x + \sin^4 x \cos^4 x (\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1) = 1 - 5\sin^2 x \cos^2 x + 6\sin^4 x \cos^4 x$$

$$\Rightarrow \sin^{10} x + \cos^{10} x = 1 - 5\sin^2 x \cos^2 x + 5\sin^4 x \cos^4 x = 1 + 5(\sin^4 x \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x)$$

$$= 1 + 5\left(\left(\sin^2 x \cos^2 x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = 5\left(\sin^2 x \cos^2 x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a = 5, \quad k = -\frac{1}{4}, \quad b = -\frac{1}{4} \Rightarrow a - \frac{k}{b} = 5 - 2 = 3$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$

ابتدا با توجه به اینکه $x + y = \frac{\pi}{12}$ است، داریم:

$$x + y = \frac{\pi}{12} \Rightarrow x + y + y = \frac{\pi}{12} \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{12} - y \Rightarrow \cos(x + y) = \cos\left(\frac{\pi}{12} - y\right) = \sin y$$

$$\cos(x + y) = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \sin y = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\tan\left(y - \frac{5\pi}{12}\right) = -\tan\left(\frac{5\pi}{12} - y\right) = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{12} - y\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{12} - y\right) = -\cot y$$

اکنون خواسته سؤال را بررسی می‌کنیم:

بنابراین $\cot y$ را به دست می‌آوریم:

$$1 + \cot^2 y = \frac{1}{\sin^2 y} \Rightarrow 1 + \cot^2 y = \frac{1}{\frac{10}{100}} \Rightarrow \cot^2 y = 9 \Rightarrow \cot y = \pm 3$$

$$\xrightarrow{y \text{ در ناحیه اول}} \cot y = 3 \xrightarrow{\text{خواسته سؤال}} -\cot y = -3$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: برای هر زاویه دلخواه x داریم: $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$

نکته: نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت روبه‌رو است:

ابتدا عبارت $25\sin^2 x - 4 \cdot \sin x$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

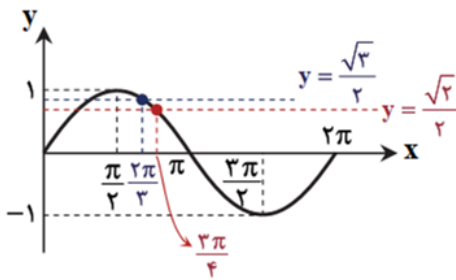
$$25\sin^2 x - 4 \cdot \sin x + 16 - 16 = (\Delta \sin x - 4)^2 - 16$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\times \Delta} -\Delta \leq \Delta \sin x \leq \Delta \xrightarrow{-4} -4 - \Delta \leq \Delta \sin x - 4 \leq \Delta - 4$$

$$-9 \leq \Delta \sin x - 4 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (\Delta \sin x - 4)^2 \leq 11$$

پس کمترین مقدار عبارت $(\Delta \sin x - 4)^2$ برابر صفر است و زمانی رخ می‌دهد که $\sin x = \frac{4}{\Delta}$ باشد. در نتیجه:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos x = \pm \frac{3}{5}$$



از طرفی چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ است، $[\cos x]$ یکی از مقادیر -1 ، 0 یا 1 خواهد بود. پس کمترین مقدار تابع $f(x)$ وقتی اتفاق می‌افتد که:

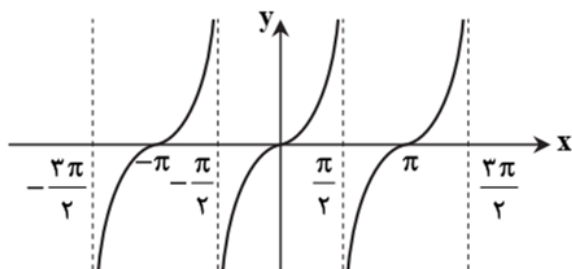
$$\sin x = \frac{4}{\Delta}, [\cos x] = -1 \Rightarrow \cos x = -\frac{3}{5} \Rightarrow x \text{ در ناحیه دوم است.}$$

اکنون با توجه به نمودار $y = \sin x$ و دقت به اینکه $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ داریم:

$$\Rightarrow x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: نمودار تابع $y = \tan x$ به شکل زیر است:



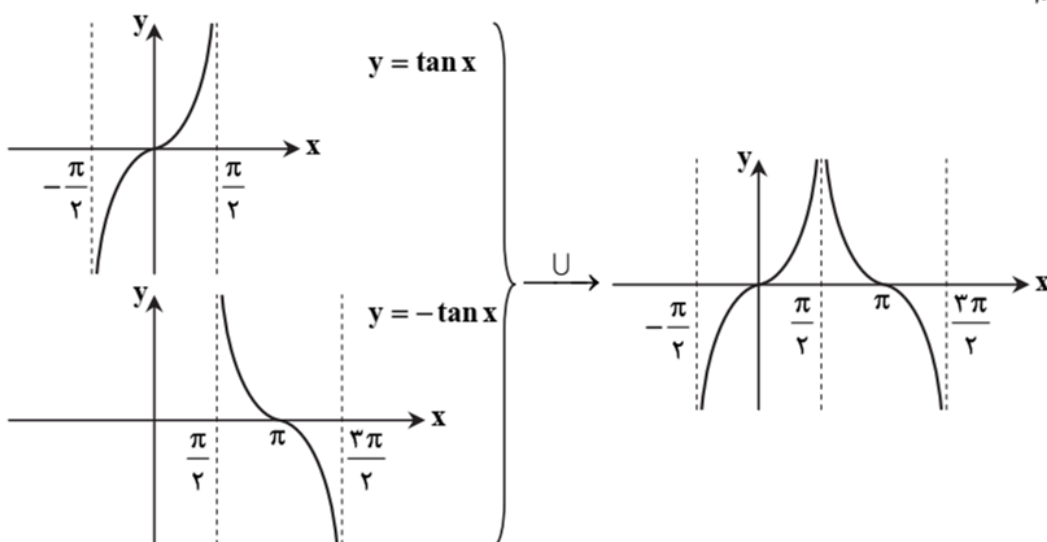
نکته: برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم. ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{|\cos x|}$$

با تعیین علامت $\cos x$ داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\cos x} & ; \cos x > 0 \\ \frac{\sin x}{-\cos x} & ; \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \tan x & ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -\tan x & ; \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

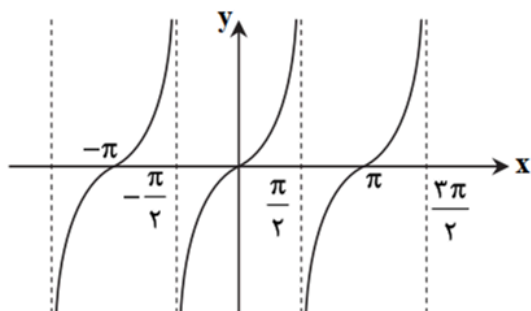
اکنون نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار تابع f ، گزینه ۳ درست است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: نمودار تابع تانژانت مطابق شکل روبه‌رو است:



نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است، پس:

$$f(0) = 0 \Rightarrow 0 = a - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = 1 - \sqrt{3} \tan\left(bx + \frac{\pi}{6}\right)$$

با توجه به شکل در $x = \frac{\pi}{6}$ تابع f تعریف نشده است و چون اولین تعریف‌نشده‌گی تابع در اعداد مثبت است، باید کمان تابع برابر $\frac{\pi}{6}$ باشد:

$$b \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{b\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow y = 1 - \sqrt{3} \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= 1 - \sqrt{3} \tan\left(\frac{7 \times 2\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sqrt{3} \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3} \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= 1 - \sqrt{3} \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3} \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = -2 \end{aligned}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$-\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\underbrace{\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}}_{\alpha}\right) \sin\left(\underbrace{\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}}_{\beta}\right)$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \\ \beta = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{+} \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \beta = \cos \alpha$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

بنابراین داریم:

$$2\alpha = \frac{\pi}{3} - x \Rightarrow \cos 2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

از طرفی با توجه به سمت راست معادله داریم:

پس می‌توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{0/4}{\cos 2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 0/4 \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 4\alpha = 0/4 \Rightarrow \sin 4\alpha = 0/4 > 1 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد.}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

ابتدا سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

نکته: $\cos(\pi - x) = -\cos x$

نکته: $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$

نکته: جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

نکته: جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

$$4\sin^2 6x + 3 = 3\cos(\pi - 2x) \Rightarrow 4\sin^2 6x + 3 = -3\cos 2x \Rightarrow 4\sin^2 6x + 3 + 3\cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow 4\sin^2 6x + 3(1 + \cos 2x) = 0 \Rightarrow 4\sin^2 6x + 6\cos^2 x = 0$$

با توجه به اینکه $4\sin^2 6x \geq 0$ و $6\cos^2 x \geq 0$ ، پس مجموع آن‌ها وقتی صفر است که هر دو عبارت برابر صفر باشند، بنابراین داریم:

$$4\sin^2 6x = 0 \Rightarrow \sin 6x = 0 \Rightarrow 6x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{6} \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{x \in (0, \pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$$

$$6\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{x \in (0, \pi)} x = \frac{\pi}{2}$$

پس $x = \frac{\pi}{2}$ تنها جواب معادله در بازه $(0, \pi)$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: اگر $\cos x = 0$ باشد، مقدار $\tan x$ تعریف نشده است و اگر $\sin x = 0$ باشد، مقدار $\cot x$ تعریف نشده است، در غیر این صورت

$\tan x$ و $\cot x$ هر عدد دلخواهی می‌توانند باشند و همواره داریم:

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$3\cot x = m - \tan x \Rightarrow \tan x + 3\cot x - m = 0 \Rightarrow \tan x + \frac{3}{\tan x} - m = 0$$

$$\xrightarrow{(\times \tan x)} \tan^2 x + 3 - m \tan x = 0 \Rightarrow \tan^2 x - m \tan x + 3 = 0$$

$$\tan x = A \Rightarrow A^2 - mA + 3 = 0$$

برای اینکه تساوی بالا برقرار نباشد، باید معادله درجه دوم $A^2 - mA + 3 = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد؛ یعنی:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4(1)(3) < 0 \Rightarrow m^2 - 12 < 0$$

$$\Rightarrow m^2 < 12 \Rightarrow -\sqrt{12} < m < \sqrt{12}$$

بنابراین اگر $m \in (-\sqrt{12}, \sqrt{12})$ باشد، معادله فوق ریشه ندارد، پس هیچ‌گاه برقرار نیست.

در این بازه مقادیر صحیح $m = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ وجود دارند، پس به‌ازای ۷ مقدار صحیح m تساوی برقرار نیست.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵

نقطه (۰, -۱) روی تابع قرار دارد، پس:

$$f(0) = -1 \Rightarrow a + b = -1 \quad (1)$$

از طرفی بیشترین مقدار تابع که به ازای $x = \pi$ ایجاد می شود، برابر با ۳ است، بنابراین:

$$f(\pi) = 3 \Rightarrow -a + b = 3 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = -2, b = 1$$

پس خواسته سؤال برابر $a^3 - b = -9$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\text{نکته: } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\text{نکته: } \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

نکته: جواب های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

ابتدا معادله مثلثاتی را ساده کرده، سپس آن را حل می کنیم:

$$\begin{aligned} 4(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos(2 \times 2\alpha)) &= 1 \\ \Rightarrow 4(1 + 2\cos^2 \alpha - 1)(1 + 2\cos^2 2\alpha - 1) &= 1 \\ \Rightarrow 4 \times 2\cos^2 \alpha \times 2\cos^2 2\alpha &= 1 \\ \Rightarrow 16\cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha &= 1 \end{aligned}$$

با فرض $\sin \alpha \neq 0$ طرفین معادله را در $\sin^2 \alpha$ ضرب می کنیم:

$$\begin{aligned} 16\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha &= \sin^2 \alpha \\ \Rightarrow 4(2\sin \alpha \cos \alpha)^2 \cos^2 2\alpha &= \sin^2 \alpha \\ \Rightarrow 4\sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha &= \sin^2 \alpha \\ \Rightarrow (2\sin 2\alpha \cos 2\alpha)^2 &= \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin^2 4\alpha = \sin^2 \alpha \Rightarrow \begin{cases} \sin 4\alpha = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha = 2k\pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{3} \\ 4\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5} \end{cases} \\ \sin 4\alpha = \sin(-\alpha) \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha = 2k\pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{5} \\ 4\alpha = 2k\pi + \pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

به ازای مقادیر مختلف صحیح k جواب های $\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}, 2\pi, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$ در بازه $[0, 2\pi)$ به دست می آید که جواب های $\alpha = 0$ و $\alpha = \pi$ غیر قابل قبول هستند؛ زیرا $\sin \alpha = 0$. پس معادله دارای ۱۲ جواب قابل قبول زیر است:

$$\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: توابع $y = a\cos bx + c$ و $y = a\sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

دوره تناوب تابع با توجه به شکل، برابر با 4π است:

$$\frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

با توجه به مینیمم و ماکزیمم تابع داریم:

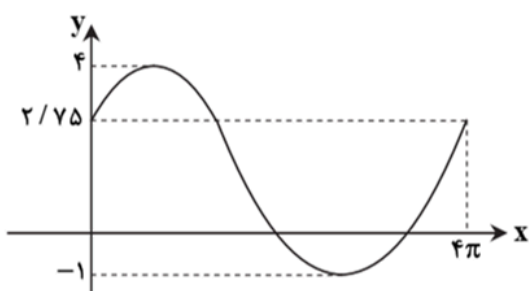
$$\begin{cases} \max = 4 \Rightarrow c + |a| = 4 \\ \min = -1 \Rightarrow c - |a| = -1 \end{cases} \Rightarrow 2c = 3 \Rightarrow c = 1/2 \Rightarrow |a| = 2/2 \Rightarrow a = \pm 2/2$$

با توجه به نمودار تابع، $f(0) = 2/2$ است، پس:

$$f(0) = \frac{11}{4} \Rightarrow a\cos(-\frac{\pi}{3}) + c = \frac{11}{4} \Rightarrow a \times \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{11}{4} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 2/2$$

پس a مقداری مثبت و برابر $2/2$ است.

برای تعیین علامت b ، هر دو علامت مثبت و منفی را در نظر گرفته و تابع را رسم می‌کنیم:



$$b = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = 2/2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 1/2$$

تابع $\cos$ به سمت راست منتقل می‌شود.

$$b = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = 2/2 \cos\left(-\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) + 1/2$$

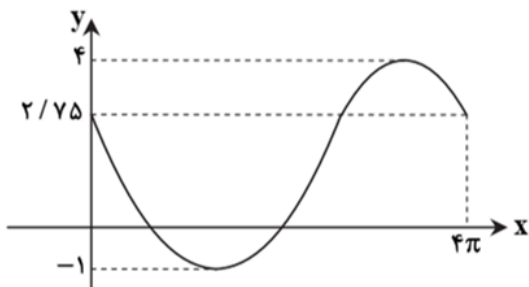
$$\Rightarrow f(x) = 2/2 \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + 1/2$$

تابع $\cos$ به سمت چپ منتقل می‌شود.

بنابراین در حالت $b = -\frac{1}{2}$ ، شکل تابع مطابق نمودار داده شده است.

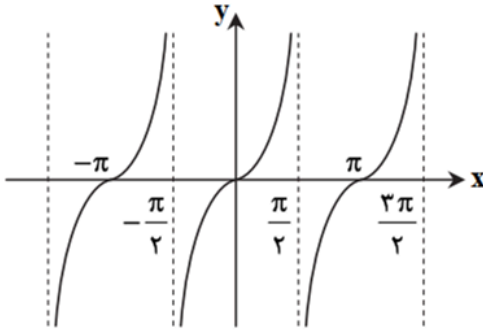
پس $a = \frac{5}{2}$ ، $b = -\frac{1}{2}$ و $c = \frac{3}{2}$ داریم:

$$a + b + c = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3/2$$



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: نمودار تابع $y = \tan x$ به شکل زیر است:



نکته: در نقاطی به طول $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)، مقدار $\cos x$ برابر صفر است.

نکته: $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

ابتدا داریم: $f(x) = 1 - \sqrt{3} \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}x\right) = 1 + \sqrt{3} \tan\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{3}\right)$

با توجه به نمودار در $x = x_B$ تابع تعریف نشده است، پس x_B ، دومین جواب

مثبت معادله $\cos\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ است:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div \pi} \frac{1}{4}x - \frac{1}{3} = k + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}x = k + \frac{5}{6} \xrightarrow{\times 4} x = 4k + \frac{10}{3}$$

اولین جواب مثبت: $k = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$

دومین جواب مثبت: $k = 1 \Rightarrow x = 4 + \frac{10}{3} = \frac{22}{3} \Rightarrow x_B = \frac{22}{3} \Rightarrow B\left(\frac{22}{3}, 0\right)$

اکنون مختصات نقطه A را به دست می آوریم: $x_A = 0 \Rightarrow f(0) = 1 + \sqrt{3} \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}(-\sqrt{3}) = 1 - 3 = -2 \Rightarrow A(0, -2)$

بنابراین داریم: $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-2)}{\frac{22}{3} - 0} = \frac{2}{11}$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: $\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha$ یا $x = 2k\pi + \pi - \alpha$

تابع از دو نقطه $(0, 0)$ و $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ عبور کرده است، پس $f(0) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$

$$f(0) = 0 \Rightarrow 2 \sin b + 1 = 0 \Rightarrow \sin b = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin b = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow b = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \text{ یا } b = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{0 \leq b < 2\pi} b = \frac{5\pi}{6} \text{ یا } \frac{11\pi}{6} \quad (*)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + b\right) + 1 = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + b\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + b\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} + b = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \text{ یا } \frac{\pi}{3} + b = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow b = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ یا } b = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{0 \leq b < 2\pi} b = \frac{\pi}{2} \text{ یا } b = \frac{11\pi}{6} \quad (**)$$

از اشتراک $(*)$ و $(**)$ نتیجه می شود: $b = \frac{11\pi}{6}$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۰

نکته: روابط $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ و $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ نتیجه روابط $\cos 2\alpha$ هستند که برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی 15° و

$22/5^\circ$... کاربرد دارند.

با توجه به نکته بالا می‌توان نوشت:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} : \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \\ \alpha = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

اکنون می‌توان نتیجه گرفت:

$$A = 4\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4}\right) - 4\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4}\right) = 2 - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

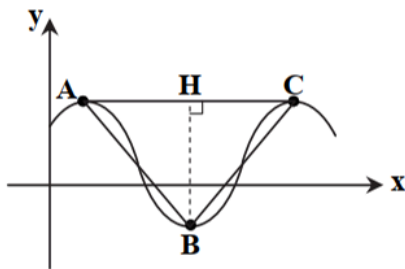
۳۱

نکته: توابع $y = a \sin(bx) + c$ و $y = a \cos(bx) + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ ، مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

ابتدا دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم تابع را می‌یابیم.

$$y = a \sin(bx) + 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \max = |a| + 2, \quad \min = -|a| + 2$$

طبق شکل مقابل، اندازه ضلع AC برابر با دوره تناوب است و ارتفاع BH برابر با اختلاف ماکزیمم و مینیمم است.



$$AC = T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad BH = \max - \min = |a| + 2 - (-|a| + 2) = 2|a|$$

می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع k ، ارتفاع برابر $\frac{k\sqrt{3}}{2}$ است، پس:

$$BH = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow 2|a| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 2|a| = \frac{\pi\sqrt{3}}{|b|} \Rightarrow 2|a||b| = \pi\sqrt{3} \Rightarrow |a \cdot b| = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۲

پله اول: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c$ وقتی $a + b + c = 0$ باشد یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و دیگری برابر $\frac{c}{a}$ است.

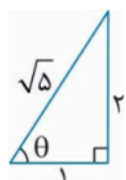
در معادله داده شده یکی از ریشه‌هایش برابر ۱ است بنابراین: $1 + \tan \theta - 3 = 0 \Rightarrow \tan \theta = 2$

پله دوم: عبارت خواسته شده در صورت سؤال را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\left(\frac{13\pi}{2} - \theta\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)}{1 - \tan(\theta - \pi)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)}{1 + \tan(\pi - \theta)} = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{1 - \tan \theta}$$

پله سوم: با فرض $\tan \theta = 2$ و $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ سایر نسبت‌های مثلثاتی را حساب می‌کنیم و در عبارت خواسته شده جایگذاری می‌کنیم:

با توجه به محدوده θ و مثبت بودن $\tan \theta$ می‌توان نتیجه گرفت θ در ناحیه سوم قرار دارد.



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\cos \theta + \sin \theta}{1 - \tan \theta} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{5}} + \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)}{1 - 2} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۳

می‌دانیم مجموع زوایای داخلی مثلث برابر 180° است، بنابراین داریم:

$$x + y + z = \pi \quad (*) \rightarrow \cos(x + y + z) = \cos \pi = -1$$

$$\sin \frac{x - \pi}{2} = \sin \frac{1 \cdot 1\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \rightarrow x - \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{*} y + z = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \sin(y + z) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \cos(y + z) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

پس:

$$\cos(x + y + z) \cos(y + z) + \sin(y + z) = (-1) \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

توجه به این که در هر مثلث $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ است، کلید حل مسئله است.

پله اول:

$$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) + \sin\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad (*)$$

اگر $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow \frac{A+B+C}{2} = 90^\circ \Rightarrow \underbrace{\frac{A+B}{2}}_{\alpha} + \underbrace{\frac{C}{2}}_{\beta} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$(*) \Rightarrow \cos\left(\frac{C}{2}\right) + \sin\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{توان}} \underbrace{\cos^2 \frac{C}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}}_1 + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin\left(\frac{C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{-15}{32}$$

پله دوم:

$$\sin\left(\frac{C}{2}\right) + \frac{\sin\left(\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)} + \cos\left(\frac{C}{2}\right) + \frac{\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)} = \sin\left(\frac{C}{2}\right) + \tan\left(\frac{C}{2}\right) + \cos\left(\frac{C}{2}\right) + \cot\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{\sin\left(\frac{C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{-15}{32}} = \frac{1}{4} - \frac{32}{15} = \frac{-113}{60}$$

یادآوری: چند رابطه مثلثاتی مهم:

$$(\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

توجه به این نکته که کمان سینوس و کسینوس می‌تواند متمم هم باشد.

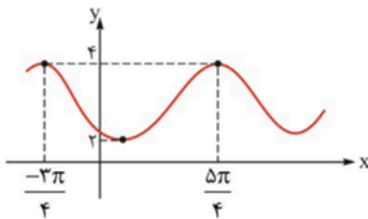
پله اول: می‌دانیم $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ است، پس $\cos\left(\frac{\pi}{4} - cx\right) = \cos\left(cx - \frac{\pi}{4}\right)$ است. بنابراین داریم:

$$f(x) = a + b \cos\left(\frac{\pi}{4} - cx\right) + \sin\left(cx + \frac{\pi}{4}\right)$$

در ضمن دو زاویه $\frac{\pi}{4} - cx$ و $cx + \frac{\pi}{4}$ متمم‌اند، چون مجموع آن‌ها $\frac{\pi}{2}$ است. پس به جای $\cos\left(\frac{\pi}{4} - cx\right)$ می‌نویسیم $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ و داریم:

$$f(x) = a + b \sin\left(cx + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(cx + \frac{\pi}{4}\right) = a + (b+1) \sin\left(cx + \frac{\pi}{4}\right)$$

پله دوم: حال با توجه به شکل، یک نمودار سینوسی با دوره تناوب $T = \frac{5\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 2\pi$ داریم که بیشترین مقدار آن برابر ۴ و کمترین مقدار آن برابر ۲ است، پس ضابطه آن به صورت $f(x) = 3 - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ است. بنابراین:



$$\begin{cases} a = 3 \\ b+1 = -1 \Rightarrow b = -2 \\ T = \frac{2\pi}{|c|} \xrightarrow{c>0} 2\pi = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{ac}{b} = -\frac{3}{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

به جای $\frac{1}{4}$ می‌نویسیم $\log_{\sqrt{2}}$ و سپس لگاریتم سمت راست معادله را به مبنای ۴ می‌بریم:

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3 - \cos 2x} = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{3 - \cos 2x})^2 = \log_{\sqrt{2}} (3 - \cos 2x)$$

حالا معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{2}} (3 \sin x) + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = \log_{\sqrt{2}} (3 - \cos 2x) \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} (3\sqrt{2} \sin x) = \log_{\sqrt{2}} (3 - \cos 2x)$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2} \sin x = 3 - \frac{\cos 2x}{1 - 2\sin^2 x} \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sqrt{2} \sin x + 3 = 0$$

$$\Delta = 18 - 36 = -18 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{18}}{4} = \sqrt{2}x \\ \sin x = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{18}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

با تجزیه کردن معادله داده شده داریم:

$$x^2 - kx + \frac{rk^2}{9} = (x - \frac{rk}{3})(x - \frac{k}{3}) = 0$$

با توجه به هم‌علامت بودن ریشه‌ها، ۲ حالت داریم:

$$۱) \begin{cases} \cos a = \frac{k}{3} \\ \sin a = \frac{rk}{3} \end{cases} \quad ۲) \begin{cases} \cos a = \frac{rk}{3} \\ \sin a = \frac{k}{3} \end{cases}$$

می‌دانیم $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ ، که در این صورت ۲ حالت به صورت زیر خواهند بود:

$$۱) \begin{cases} \cos a = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \sin a = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Rightarrow \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$۲) \begin{cases} \cos a = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin a = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Rightarrow \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

بنابراین اختلاف مقادیر ممکن برابر با $\frac{6}{5} = 1/2$ است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\sin \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \cos \frac{\hat{C}}{2}$$

$$\rightarrow \cos \frac{\hat{C}}{2} - \sin \frac{\hat{C}}{2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1 - \sin \hat{C} = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \sin \hat{C} = \frac{3}{4} \xrightarrow{0 < \hat{C} < 90^\circ} \tan \hat{C} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$(\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow -\cot(\hat{A} + \hat{B}) = \cot \hat{C}$$

$$\cot \hat{C} - \tan \hat{C} = 2 \cot 2\hat{C} \rightarrow \cot \hat{C} - 2 \cot 2\hat{C} = \tan \hat{C} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

می‌دانیم $(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}) + \frac{\hat{C}}{2} = 90^\circ$ پس داریم:

حالا داریم:

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x = 2\sqrt{a} \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x = 2\sqrt{a} \rightarrow \sin 2x = \sqrt{a} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{a} = \sin \frac{\pi}{4} \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 2x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{3\pi}{4}, \dots$$

و در نتیجه داریم:

$$\xrightarrow{\div 2} x = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \pi + \frac{\pi}{8}, \pi + \frac{3\pi}{8}$$

$$\pi + \frac{\pi}{8} + \pi + \frac{3\pi}{8} = \frac{5\pi}{4}$$

که مجموع جوابها در $[\pi, 2\pi]$ برابر است با:

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\xrightarrow{\text{فرمول طلایی}} 2 \cos^2 \frac{x}{2} \cdot 2 \cos^2 x \cdot 2 \cos^2 2x = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \cos \frac{x}{2} \cos x \cos 2x = \pm \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\times \sin \frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x \cos 2x = \pm \frac{1}{4} \sin \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} (-\sin 2x) \cos 2x = \pm \frac{1}{4} \sin \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \sin 4x = \pm \frac{1}{4} \sin \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 4x = \pm \sin \frac{x}{2} \Rightarrow 4x = k\pi \pm \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2}x = k\pi \text{ یا } \frac{9}{2}x = k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7} \text{ یا } \frac{2k\pi}{9}$$

$$\xrightarrow{(\cdot, 2\pi)} \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7} \rightarrow \text{جمع} = 3 \times 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{12\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{16\pi}{9} \rightarrow \text{جمع} = 4 \times 2\pi$$

جمع کل: 14π

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$T = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{2}{3} \xrightarrow{b>0} \frac{2}{3}$$

دقت کنید که ضریب x را مثبت فرض می‌کنیم و ضریب $\tan$ را منفی می‌گیریم.

$$f(x) = 1 + k \tan\left(\frac{2}{3}\left(x - \frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

حالا توجه کنید که $\frac{5\pi}{4}$ دقیقاً وسط دو مجانب است. پس:

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow 1 + k \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \rightarrow k = -\sqrt{3}$$

$$f(x) = 1 - \sqrt{3} \tan\left(\frac{2x}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$f^{-1}(4) \Rightarrow 1 - \sqrt{3} \tan\left(\frac{2x}{3} - \frac{5\pi}{6}\right) = 4 \rightarrow \tan\left(\frac{2x}{3} - \frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{3} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{24}} \frac{2[\lambda x] + \overbrace{\sin \lambda x}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} [\overbrace{2 \sin 6x}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}]}{\underbrace{\cos^2 x - \cos^2 x \cdot \sin^2 x - \sin^2 x}_{-\sin^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x)}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{24}} \frac{2(1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(1)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

با توجه به اینکه $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ ، داریم:

$$\cos \frac{\pi}{6} = 2\cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

و در نهایت داریم:

$$\frac{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = \frac{4 + \sqrt{3}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \times \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{(4\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2\sqrt{3} - 3})}{1}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

با استفاده از اتحاد مزدوج $f(x)$ را ساده کرده و با تشکیل fog و gof معادله را حل کنید.



۴۳

$$f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1) \quad f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$(fog)(x) = \cos 4x \text{ و } (gof)(x) = 2\cos 2x$$

$$(fog)(x) - (gof)(x) = \cos^2 x \rightarrow \cos 4x - 2\cos 2x = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

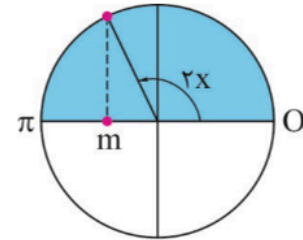
$$2\cos 4x - 4\cos 2x = 1 + \cos 2x$$

$$2(2\cos^2 2x - 1) - 4\cos 2x - 1 = 0$$

$$4\cos^2 2x - 4\cos 2x - 3 = 0 \rightarrow \Delta = 25 + 48 = 73$$

$$\cos 2x = \frac{4 \pm \sqrt{73}}{4} \xrightarrow{-1 \leq \cos 2x \leq 1} \cos 2x = \frac{4 - \sqrt{73}}{4} = m$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < 2x < \pi$$



بنابراین معادله داده شده در بازه $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ دارای یک جواب است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

پله اول: با توجه به این که ربع دوره تناوب برابر $\frac{9}{8} - \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$ است، داریم:

۴۴

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow b = \pi$$

پله دوم: بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{1}{4}$ و کمترین مقدار تابع برابر $-\frac{1}{4}$ است، چون نمودار در مبدأ صعودی است، پس $a = \frac{1}{4}$ است.

در ضمن $f\left(\frac{9}{8}\right) = 0$ است:

$$\frac{1}{2} \sin\left(\pi\left(\frac{9}{8}\right) - c\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{9\pi}{8} - c\right) = 0 \xrightarrow{0 < c < \pi} c = \frac{\pi}{8}$$

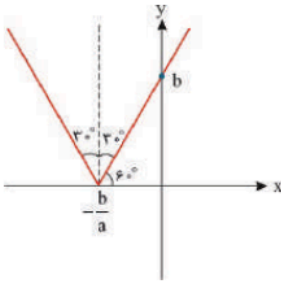
بنابراین داریم:

$$\frac{ab}{c} = \frac{\frac{1}{4} \times \pi}{\frac{\pi}{8}} = 2$$

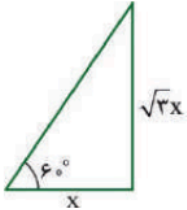
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۵

پله اول: نمودار تابع $y = |ax + b|$ با شرط $b > 0$ و $a > 0$ را رسم می‌کنیم: زاویه بین دو نیم خط 60° است. پس شیب نیم خط سمت راست برابر $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ می‌شود.



پله دوم: در مثلث ایجاد شده داریم:



$$S = \frac{x \sqrt{3}x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

بنابراین $b = 3$ و $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ یعنی $a = \sqrt{3}$

پله سوم: حاصل عبارت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{3 \times 3^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۶

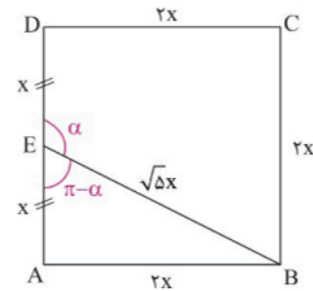
سرنخ هم چیز برمیگرده به اون مثلث رازآلودی (!) که اون پایین تشکیل شده! نسبت های مثلثاتی زوایاشو به راحتی میشه به دست آورد...

پله اول: طول ضلع مربع را $2x$ در نظر می‌گیریم:

با استفاده از رابطه فیثاغورث در مثلث قائم الزاویه ABE طول BE برابر $\sqrt{5}x$ است، بنابراین داریم:

$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{2x}{\sqrt{5}x} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \underbrace{\cos(\pi - \alpha)}_{-\cos \alpha} = \frac{x}{\sqrt{5}x} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = -2, \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = -\frac{4}{5}$$



پله دوم: پس مقدار $\frac{\sin 2\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 + \cot\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}$ برابر است با:

$$\frac{\sin 2\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 - \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{-\frac{4}{5} - \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{1 - (-2)} = \frac{-\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5}}{3} = \frac{\sqrt{5} - 4}{15}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\cos\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cos(2\pi - x) = \cos x$$

$$\frac{2 - \sin^2 x}{\sin x + 2 \cos x} = \cos x \xrightarrow{\sin x + 2 \cos x \neq 0} 2 - \sin^2 x = \sin x \cos x + 2 \cos^2 x \rightarrow 2 \cos^2 x + \sin^2 x + \sin x \cos x = 2$$

$$\xrightarrow{\div \cos^2 x} 2 + \tan^2 x + \tan x = \frac{2}{\cos^2 x} \xrightarrow{1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}} 2 + \tan^2 x + \tan x = 2(1 + \tan^2 x) \rightarrow \tan x(\tan x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \tan x = 0 \xrightarrow{[0, 2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi \\ \tan x = 1 \xrightarrow{[0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جوابها} = 0 + \pi + 2\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{9\pi}{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$y = -x^2 + 4x + m$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2 \rightarrow \text{ریشه } : x = x_s + 3 \rightarrow x = 2 + 3 = 5$$

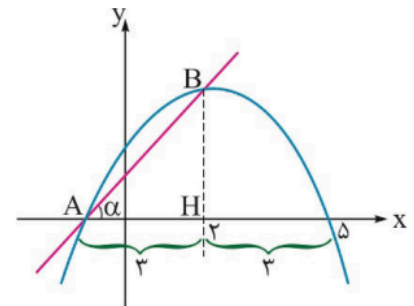
$$\xrightarrow{x_s=2} y_s = -4 + 8 + m = 4 + m \text{ عرض رأس سهمی}$$

$$\xrightarrow{x=5 \text{ ریشه}} 0 = -25 + 20 + m \rightarrow m = 5 \rightarrow y_s = 9$$

$$\rightarrow \tan \alpha = \frac{BH}{AH} = \frac{9}{3} = 3 \rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{3}{5}$$

$$\tan(\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right) = \tan \alpha - \sin 2\alpha = 3 - \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



حال داریم:

۴۹ ابتدا باید معادله را تا حد امکان ساده کنیم پس داریم:

$$\log\left(\frac{\sin x + \cos x}{2}\right) = \frac{\log^{\sin x} + \log^{\cos x}}{2}$$

$$\rightarrow 2 \log\left(\frac{\sin x + \cos x}{2}\right) = \log^{\sin x} + \log^{\cos x}$$

$$\rightarrow \log\left(\frac{\sin x + \cos x}{2}\right)^2 = \log^{\sin x} + \log^{\cos x}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\sin x + \cos x}{2}\right)^2 = \sin x \cdot \cos x$$

$$\rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{4} = \sin x \cdot \cos x$$

$$\rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 0 \rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 0$$

$$\rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow{\text{در بازه } [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{4} \text{ و } \frac{5\pi}{4}$$

به ظاهر ۲ جواب داریم اما باید حواسمان باشد که $\frac{5\pi}{4}$ غیر قابل قبول است (جلو لگاریتم را منفی می کند) پس یک جواب خواهیم داشت.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۰ چون خط d با جهت مثبت محور xها زاویه $\frac{\pi}{2} + \alpha$ می سازد، پس شیب خط d برابر $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ است:

$$m = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

چون می دانیم $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ است، می توانیم $\cot \alpha$ را پیدا کنیم:

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} \Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2} \Rightarrow \text{شیب خط } m = -\cot \alpha = -\frac{\sqrt{14}}{2}$$

در ضمن چون نقطه $B(0, 3)$ روی خط d قرار دارد، پس معادله خط d به صورت زیر است:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -\frac{\sqrt{14}}{2}(x - 0) \Rightarrow 2y + \sqrt{14}x = 6$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$x^2 + (\tan \theta)x - 3 = 0 \xrightarrow{x=1} 1 + \tan \theta - 3 = 0 \rightarrow \tan \theta = 2$$

θ در ناحیه اول یا سوم قرار دارد.

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta$$

$$\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \sin 2\theta$$

$$\tan \theta = 2 \rightarrow 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos^2 \theta = \frac{1}{5} \\ \sin^2 \theta = \frac{4}{5} \end{cases} \xrightarrow[\text{یا سوم}]{\text{ناحیه اول}} \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos \theta = \frac{-\sqrt{5}}{5} \rightarrow \sin \theta = \frac{-2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta \sin 2\theta = -2 \sin \theta \cos^2 \theta = -2 \left(\pm \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \left(\pm \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \pm \frac{4\sqrt{5}}{25}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

با جایگذاری $x = \frac{\pi}{\lambda}$ در عبارت داریم:

$$2 \sin \frac{\pi}{2} + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{\lambda} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{\lambda} = 2 + \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{\lambda} - \cos \frac{\pi}{\lambda} \right)$$

حال فرض می‌کنیم $A = \sin \frac{\pi}{\lambda} - \cos \frac{\pi}{\lambda}$ است. توجه کنید $\sin \frac{\pi}{\lambda} < \cos \frac{\pi}{\lambda}$ است، پس $A < 0$ می‌باشد و داریم:

$$A^2 = \left(\sin \frac{\pi}{\lambda} - \cos \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 = \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} - 2 \sin \frac{\pi}{\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow A^2 = 1 - \sin \frac{\pi}{\lambda} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \xrightarrow{A < 0} A = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

پس حاصل عبارت موردنظر برابر است با:

$$2 + \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{\lambda} - \cos \frac{\pi}{\lambda} \right) = 2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$f(x) = 1 + 1 - \cos^2 ax - \sin^2 ax = 1 + \sin^2 ax - \sin^2 ax$$

$$= 1 + \sin^2 ax (1 - \sin^2 ax) = 1 + \sin^2 ax \cos^2 ax = 1 + \left(\frac{1}{2} \sin^2 ax\right)^2$$

$$1 + \frac{1}{4} \sin^2 2ax \xrightarrow{\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}} f(x) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} \cos^2 4ax$$

با توجه به نمودار تابع $T = \frac{3}{4}$ پس $\frac{2}{2} T = \frac{3}{4}$

$$\frac{2\pi}{|4a|} = \frac{1}{2} \rightarrow |a| = \pi \rightarrow a = \pm \pi$$

$$B = f_{\max} = \frac{9}{8} + \left| -\frac{1}{8} \right| = \frac{10}{8}$$

$$f(x) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} \cos^2 \pi x \rightarrow f(2B) = f\left(\frac{20}{8}\right)$$

$$\rightarrow f\left(\frac{20}{8}\right) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} \cos^2 \left(4\pi \frac{20}{8}\right) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} \cos^2 10\pi = 1$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

پاسخ تشریحی گام اول: با استفاده از روابط $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ عبارت را ساده تر کنیم:

$$\frac{\cos^2 10^\circ - \frac{\cos^2 10^\circ}{\sin^2 10^\circ}}{\sin^2 10^\circ - \frac{\sin^2 10^\circ}{\cos^2 10^\circ}} \xrightarrow[\text{در مخرج از } \sin^2 10^\circ \text{ فاکتور بگیریم.}]{\text{در صورت از } \cos^2 10^\circ \text{ فاکتور بگیریم.}} \frac{\cos^2 10^\circ (1 - \frac{1}{\sin^2 10^\circ})}{\sin^2 10^\circ (1 - \frac{1}{\cos^2 10^\circ})}$$

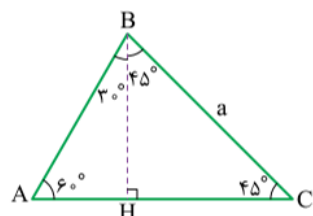
گام دوم: از روابط $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ استفاده و پرانتزها را ساده تر کنیم:

$$\frac{\cos^2 10^\circ (1 - (1 + \cot^2 10^\circ))}{\sin^2 10^\circ (1 - (1 + \tan^2 10^\circ))} = \frac{\cos^2 10^\circ \times (-\cot^2 10^\circ)}{\sin^2 10^\circ \times (-\tan^2 10^\circ)}$$

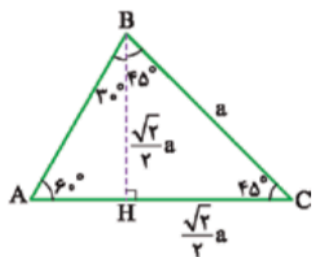
$$= \frac{\cot^2 10^\circ (-\cot^2 10^\circ)}{-\frac{1}{\cot^2 10^\circ}} = \cot^6 10^\circ$$

گام سوم: از روی $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ استفاده کنیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا از رأس B عمودی بر ضلع AC رسم می‌کنیم. دو مثلث ABH و BCH قائم‌الزاویه هستند. زوایای داخلی مثلث‌ها را مشخص می‌کنیم.
 $\hat{ABH} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
 $\hat{CBH} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$
 $\hat{BCH} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$



گام دوم: مثلث BCH قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس $BH = CH$. از طرفی در این مثلث:

$$\sin B = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{\sin 45^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{CH}{a} \Rightarrow \begin{cases} CH = \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ BH = \frac{\sqrt{2}}{2}a \end{cases}$$

$$\tan A = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{AH}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{AH} \Rightarrow AH = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$AC = AH + CH = \frac{\sqrt{6}}{6}a + \frac{\sqrt{2}}{2}a = a\left(\frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{6}\right)$$

گام سوم: در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

گام چهارم: طول قاعده AC برابر است با:

گام پنجم: مساحت مثلث را به دست می‌آوریم.

$$S = \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a \times a\left(\frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{6}\right) = a^2 \left(\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{6} + 3\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2 \times 2 \times 6}\right) = a^2 \left(\frac{2\sqrt{3} + 2 \times 3}{2 \times 12}\right) = a^2 \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{12}\right)$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\xrightarrow{\times \sin x} \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8} \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \sin 8x = \frac{1}{8} \sin x \Rightarrow \sin 8x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 8x = 2k\pi + x \\ 8x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7} \text{ یا } \frac{2k\pi + \pi}{9}$$

$$\xrightarrow{[0, 2\pi]} \begin{array}{c|cccccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline x & 0 & \frac{2\pi}{7} & \frac{4\pi}{7} & \frac{6\pi}{7} & \frac{8\pi}{7} & \frac{10\pi}{7} & \frac{12\pi}{7} & 2\pi \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline x & \frac{\pi}{9} & \frac{3\pi}{9} & \frac{5\pi}{9} & \frac{7\pi}{9} & \frac{9\pi}{9} & \frac{11\pi}{9} & \frac{13\pi}{9} & \frac{15\pi}{9} & \frac{17\pi}{9} \end{array}$$

اما دقت کنید که ریشه‌های $\sin x$ در معادله صدق نمی‌کنند. پس $0, \pi, 2\pi$ از این ۱۷ تا جواب حذف می‌شوند.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

پاسخ تشریحی راه اول: گام اول: از تساوی داده شده باید به خواسته سؤال برسیم. ابتدا $\tan x$ را برابر با $\frac{\sin x}{\cos x}$ قرار می دهیم و مخرج مشترک می گیریم.

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\tan x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

گام دوم: یا از نکته زیر استفاده کنید یا اگر علاقه ای به حفظ کردن فرمول های اضافه ندارید، سمت چپ تساوی (۱) را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم کنید و در ادامه از اتحاد $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ استفاده کنید.

$$\frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\overbrace{1 - \sin^2 x}^{\cos^2 x}}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

نکته اتحاد مثلثاتی: $\frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

گام سوم: طرفین تساوی (۲) را معکوس می کنیم و سپس کسر سمت چپ تساوی را تفکیک می کنیم.

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} = 3 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} + \tan x = 3 \quad (3)$$

گام چهارم: طرفین تساوی (۳) را با طرفین تساوی $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{3}$ که در صورت سؤال داده شده است، جمع می کنیم:

$$\text{جمع: } \frac{2}{\cos x} = \frac{10}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{\cos x}{2} = \frac{3}{10} \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{(3)} \frac{1}{\frac{3}{5}} + \tan x = 3 \Rightarrow \tan x = \frac{4}{3} \xrightarrow{\cot x = \frac{1}{\tan x}} \cot x = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{1 - \sin x}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \sin x = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin x = \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{\sin x} - \cot x = \frac{1}{\frac{4}{5}} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

گام پنجم: خواسته سؤال را به دست می آوریم:

راه دوم: گام اول:

$$\frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = 3 - 3 \sin x \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\cos x)^2 = (3 - 3 \sin x)^2 \xrightarrow{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x}$$

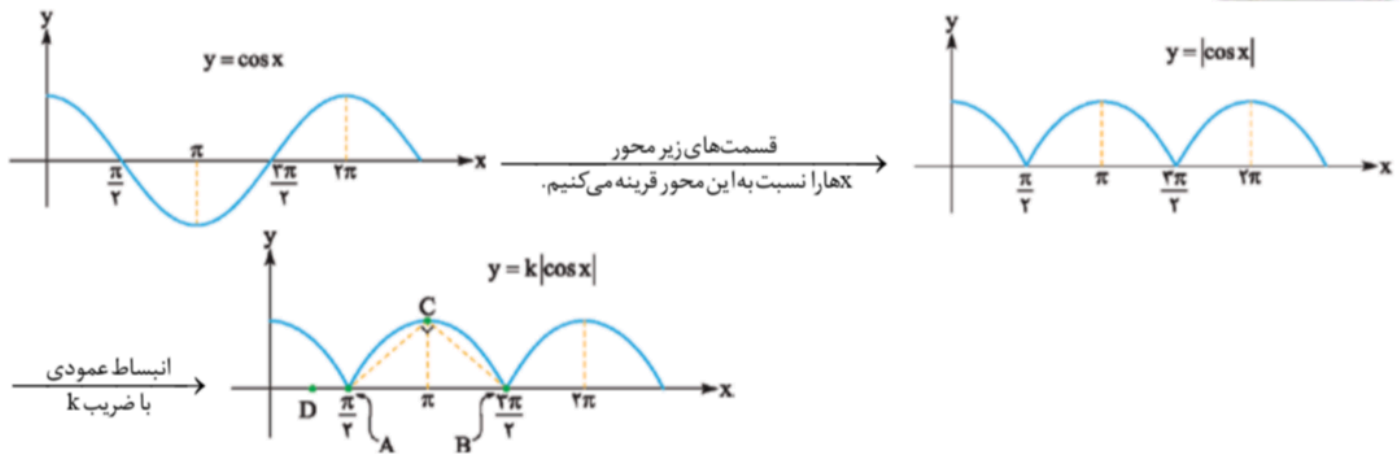
$$(3 - 3 \sin x)^2 + \sin^2 x = 1 \Rightarrow 10 \sin^2 x - 18 \sin x + 8 = 0 \xrightarrow{\substack{a+b+c=0 \\ \alpha=1, \beta=\frac{c}{a}}} \begin{cases} \sin x = 1 \times \\ \sin x = \frac{4}{5} \checkmark \end{cases}$$

گام دوم: از اتحاد مثلثاتی $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ استفاده می کنیم تا $\cot x$ به دست آید:

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{(\frac{4}{5})^2} \Rightarrow \cot^2 x = \frac{9}{16} \xrightarrow{\cot x > 0} \cot x = \frac{3}{4}$$

توجه کنید که از تساوی $\frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1}{3}$ نتیجه می گیریم $\cos x > 0$ است (چرا؟). $\sin x$ هم که مثبت به دست آمد، پس باید، $\cot x > 0$ باشد. ادامه حل مطابق گام پنجم راه حل اول است.

گام اول: از روی نمودار تابع $y = \cos x$ ، نمودار تابع $y = k|\cos x|$ را می‌سازیم.



گام دوم: از مقایسه نمودار گام اول با نمودار صورت سؤال طول AB به دست می‌آید.

گام سوم: در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC ، ارتفاع وارد بر وتر، میانه هم هست، پس طول آن برابر با نصف وتر است؛ یعنی: $y_c = \frac{AB}{2} = \frac{\pi}{2}$ هم‌چنین طبق نمودار $x_c = \pi$ است.

گام چهارم: با قراردادن مختصات نقطه $C(\pi, \frac{\pi}{2})$ در ضابطه تابع f, k را به دست می‌آوریم: $\frac{\pi}{2} = k|\cos \pi| \Rightarrow k = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2}|\cos x|$

گام پنجم: از $OD = 2DA$ نتیجه می‌گیریم: $\frac{OD}{DA} = 2 \xrightarrow{\text{جمع صورت در مخرج}} \frac{OD}{OD+DA} = \frac{2}{2+1} \Rightarrow \frac{OD}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow OD = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_D = \frac{\pi}{3}$

گام ششم: حالا باید مقدار تابع $y = (\frac{f \circ f}{\pi})(x)$ را به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ به دست آوریم.

$$y = (\frac{f \circ f}{\pi})(\frac{\pi}{3}) = (\frac{f(f(\frac{\pi}{3}))}{\pi}) = (\frac{f(\frac{\pi}{2}|\cos \frac{\pi}{3}|)}{\pi}) = \frac{f^2(\frac{\pi}{2})}{\pi^2} = \frac{(\frac{\pi}{2}|\cos \frac{\pi}{2}|)^2}{\pi^2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} \times \frac{1}{2}}{\pi^2} = \frac{1}{8}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: با استفاده از اتحاد مثلثاتی کمکی $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ ، ضابطه تابع را کمی ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a - \cos^2 \pi b x \Rightarrow f(x) = a - \frac{1 + \cos 2\pi b x}{2} \Rightarrow f(x) = a - \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\pi b x}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|2\pi b|} = \frac{1}{|b|} \quad \text{دوره تناوب}$$

$$T = \frac{1}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

گام دوم: طبق نمودار سؤال دوره تناوب تابع ۲ است، پس:

هر دو مقدار به دست آمده برای b قابل قبول است و تأثیری در جواب ندارد (زیرا $\cos x = \cos(-x)$ است). با مقدار $b = \frac{1}{2}$ جلو می‌رویم.

$$a - \cos^2(\pi b \times 0) = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2 - \cos^2 \frac{\pi x}{2}$$

گام سوم: طبق نمودار $f(0) = 1$ است، پس:

$$f(\frac{1}{3}) = 2 - \cos^2(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{3}) = 2 - \cos^2(\frac{\pi}{3}) = 2 - \underbrace{\cos^2(\pi + \frac{\pi}{3})}_{(-\cos(\frac{\pi}{3}))^2} = 2 - \underbrace{\cos^2 \frac{\pi}{3}}_{(\frac{1}{2})^2} = 1/5 \quad \text{گام چهارم: حاصل } f(\frac{1}{3}) \text{ را به دست می‌آوریم:}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: از اتحاد $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ در تساوی داده شده استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2 2x - \cos^2 2x = 0/8 \Rightarrow \sin^2 2x - (1 - \sin^2 2x) = 0/8 \Rightarrow 2\sin^2 2x = 1/8 \Rightarrow \sin^2 2x = 1/16 \quad (*)$$

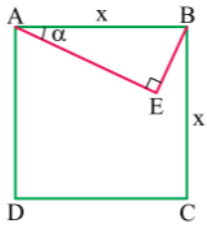
گام دوم: خواسته سؤال را با استفاده از اتحاد جبری $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab(a+b)$ و اتحاد مثلثاتی $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\underbrace{\sin^2 x}_a)^3 + (\underbrace{\cos^2 x}_b)^3 = (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1)^3 - \underbrace{3\sin^2 x \cos^2 x}_{ab} (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1) \\ &= 1^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (1) \Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \quad (1) \end{aligned}$$

گام سوم: از اتحاد مثلثاتی $2\sin x \cos x = \sin 2x$ نتیجه می‌گیریم: $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4}$. با جای گذاری در (۱) داریم:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \xrightarrow{(*)} \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{9}{16} = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



گام اول: ضلع مربع را x در نظر می‌گیریم. در مثلث قائم‌الزاویه ABE داریم:

$$\sin \alpha = \frac{BE}{x} \Rightarrow BE = x \sin \alpha \quad (1) \quad \cos \alpha = \frac{AE}{x} \Rightarrow AE = x \cos \alpha \quad (2)$$

گام دوم: مساحت مثلث ABE را می‌نویسیم و آن را برابر با $\frac{1}{8}$ مساحت مربع قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} S_{ABE} &= \frac{1}{8} S_{ABCD} \Rightarrow \frac{1}{2} BE \times AE = \frac{1}{8} x^2 \xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} (x \sin \alpha)(x \cos \alpha) = \frac{x^2}{8} \\ \xrightarrow{\div x^2} \sin \alpha \cos \alpha &= \frac{1}{8} \quad (3) \end{aligned}$$

گام سوم: از اتحاد مثلثاتی $2\sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ ، نتیجه می‌گیریم که $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$. با جای گذاری در (۳) داریم:

$$\frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{4}$$

گام چهارم: از اتحاد مثلثاتی $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan^2 \alpha - 4 \tan \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \xrightarrow{\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}} \cot \alpha = \frac{1}{2 \pm \sqrt{3}} = 2 \mp \sqrt{3}$$

جواب ۲ قابل قبول است. توجه کنید که:

$$\begin{cases} \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3} \\ \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ ، نسبت‌های مثلثاتی را در معادله هم‌نام می‌کنیم:

$$1 + \tan x = 2 \sin 2x \Rightarrow 1 + \tan x = 2 \times \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow (1 + \tan x)(1 + \tan^2 x) = 4 \tan x$$

گام دوم: با تغییر متغیر $\tan x = t$ معادله را بازنویسی و حل می‌کنیم:

$$(1+t)(1+t^2) = 4t \Rightarrow t^3 + t^2 + t + 1 = 4t \Rightarrow t^3 + t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک و دسته‌بندی}} (t^3 - t) + (t^2 - 2t + 1) = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} \underbrace{t(t^2 - 1)}_{(t-1)(t+1)} + (t-1)^2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{فکتورگیری}} (t-1)(\underbrace{t^2 + t + t - 1}_{t^2 + 2t - 1}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-1)}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = -1 + \sqrt{2} \\ \tan x = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

گام سوم: با جای‌گذاری مقادیر $\tan x$ در معادله $1 + \tan x = 2 \sin 2x$ ، مقادیر $\sin 2x$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 1 + 1 = 2 \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = 1 = \sin \frac{\pi}{2} & (1) \\ 1 + (-1 + \sqrt{2}) = 2 \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} & (2) \\ 1 + (-1 - \sqrt{2}) = 2 \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) & (3) \end{cases}$$

گام چهارم: معادله‌های (۱)، (۲) و (۳) را حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(1)} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \xrightarrow{(2)} \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{8} \end{cases}$$

گام پنجم: از مقایسه نتایج گام چهارم با مجموعه جواب کلی $\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi + \frac{i\pi}{\lambda}, k \in \mathbb{Z}, i \in A\}$ نتیجه می‌گیریم که مجموعه A حداقل شامل اعضای ۱، ۲، ۳، ۵ و -۱ است، پس حداقل ۵ عضو دارد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

پاسخ تشریحی **راه اول:** گام اول: معادله را ساده می‌کنیم.

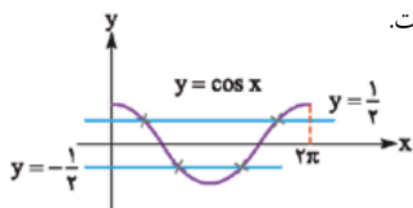
$$12\cos^2 x + \tan^2 x = 3 + 4 \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \Rightarrow 12\cos^2 x - 3 + \tan^2 x - 4 \underbrace{\sin^2 x}_{\tan^2 x \times \cos^2 x} = 0$$

$$\Rightarrow 3(4\cos^2 x - 1) - \tan^2 x(4\cos^2 x - 1) = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} (4\cos^2 x - 1)(3 - \tan^2 x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \\ 3 - \tan^2 x = 0 \Rightarrow \tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

توجه کنید که وقتی $\cos x = \pm \frac{1}{2}$ باشد، طبق رابطه $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ مقادیر $\tan x$ برابر با $\pm \sqrt{3}$ به دست می‌آید، یعنی جواب‌های $\cos x = \pm \frac{1}{2}$ بر جواب‌های $\tan x = \pm \sqrt{3}$ منطبق هستند.

گام دوم: مطابق نمودار زیر، تعداد جواب‌های معادله $\cos x = \pm \frac{1}{2}$ در بازه $(0, 2\pi)$ برابر با چهار است.



راه دوم: گام اول: با استفاده از اتحادهای مثلثاتی $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ و $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ، معادله را ساده می‌کنیم:

$$12\cos^2 x + \underbrace{1 + \tan^2 x}_{\frac{1}{\cos^2 x}} - 1 = 3 + 4 \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \Rightarrow 12\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = 3 + 4 - 4\cos^2 x$$

$$\Rightarrow 16\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 8 = 0 \xrightarrow{\times \cos^2 x, \cos x \neq 0} 16\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$$

گام دوم: از تغییر متغیر $t = \cos^2 x$ استفاده می‌کنیم ($t \geq 0$) تا به یک معادله درجه دوم برسیم.

$$16t^2 - 8t + 1 = 0 \Rightarrow (4t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2}$$

ادامه حل مشابه گام دوم از راه اول است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

پاسخ تشریحی گام اول: اول از همه حواستان باشد که در مخرج، $\cos^2 x$ داریم، پس $\cos x \neq 0$ است. با طرفین وسطین کردن داریم:

$$\frac{\tan 2x + \cot x}{\cos^2 x} = \lambda \Rightarrow \tan 2x + \cot x = \lambda \cos^2 x$$

گام دوم: تانژانت و کتانژانت را به صورت کسری می‌نویسیم:

$$\Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \lambda \cos^2 x$$

$$\xrightarrow{\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \lambda \cos^2 x$$

$$\xrightarrow{+ \cos x} \frac{2 \sin x}{\cos 2x} + \frac{1}{\sin x} = \lambda \cos x$$

گام سوم: از طرفین $\cos x$ را ساده می‌کنیم:

گام چهارم: با مخرج مشترک‌گیری و طرفین وسطین داریم:

$$\Rightarrow \frac{2 \sin^2 x + \cos 2x}{\cos 2x \cdot \sin x} = \lambda \cos x \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2 \sin^2 x + \cos 2x = \lambda \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x$$

گام پنجم: به جای $\cos 2x$ در سمت چپ، قرار می‌دهیم $1 - 2 \sin^2 x$ و به جای $\sin x \cdot \cos x$ سمت راست، قرار می‌دهیم $\frac{\sin 2x}{2}$:

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x + 1 - 2 \sin^2 x = \lambda \times \frac{\sin 2x}{2} \times \cos 2x$$

$$\Rightarrow 1 = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \xrightarrow{\sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{\sin 4x}{2}} 1 = 2 \times \frac{\sin 4x}{2} \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2}$$

بالاخره معادله ساده شد 😊

گام ششم: به جای $\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم $\sin \frac{\pi}{6}$ و معادله مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم:

$$\Rightarrow \sin 4x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 4x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \xrightarrow{\text{کوچک‌ترین جواب مثبت}} \frac{\pi}{24} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24} \xrightarrow{\text{کوچک‌ترین جواب مثبت}} \frac{5\pi}{24} \end{cases}$$

گام هفتم: بنابراین کوچک‌ترین جواب مثبت معادله، $\alpha = \frac{\pi}{24}$ است. در آخر داریم:

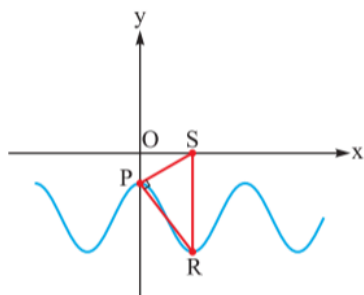
$$\cos 6\alpha + \sqrt{3} \sin 6\alpha = \cos\left(6 \times \frac{\pi}{24}\right) + \sqrt{3} \times \sin\left(6 \times \frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: ابتدا تابع y داده شده را ساده می کنیم:

$$y = c - 2 \cos(\pi + x) = c + 2 \cos x$$

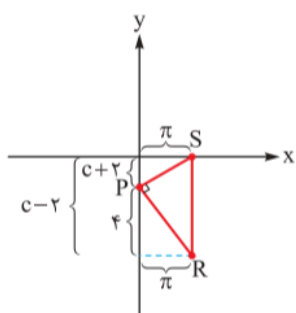
گام دوم:



دوره تناوب این تابع برابر با 2π است و از نمودار مشخص است که OS، نصف دوره تناوب است؛ پس:

$$x_S = \frac{T}{2} = \pi = x_R$$

$$y_R = c + 2 \cos \pi = c - 2$$

گام سوم: حالا y_R را می یابیم:مختصات نقطه P نیز، $(\frac{\pi}{4}, c + 2)$ است؛ پس مثلث زیر را خواهیم داشت:دو پاره خط PS و PR بر هم عمود هستند؛ پس حاصل ضرب شیب آنها برابر با -1 است:

$$\left. \begin{aligned} m_{PS} &= \frac{-c-2}{\frac{\pi}{4}} \\ m_{PR} &= -\frac{\pi}{\pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{PS} \times m_{PR} = -\frac{c+2}{\pi} \left(-\frac{4}{\pi}\right) = -1$$

$$\Rightarrow c + 2 = \frac{-\pi^2}{4} \Rightarrow c = -\frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$y_P = c + 2 = -\frac{\pi^2}{4} - 2 + 2 = -\frac{\pi^2}{4}$$

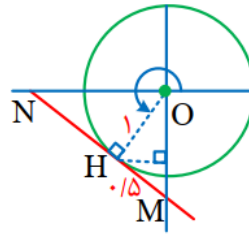
گام چهارم: عرض نقطه P برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

می‌دانیم:

۶۶

$$OM^2 = HM^2 + OH^2 \Rightarrow OM = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



همچنین می‌دانیم:

$$HH' = \frac{OH \times HM}{OM} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \rightarrow \sin \theta = -\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}$$

می‌دانیم:

$$\tan(2\theta - \frac{3\pi}{2}) = -\cot 2\theta = -\frac{1}{\tan 2\theta} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

در نهایت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

۶۷

$$\cos(\alpha + \frac{5\pi}{4}) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{4} + \pi) = -\cos(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow -\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

می‌دانیم $(\alpha + \frac{\pi}{4}) - (\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$ ، پس:

$$\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + (\alpha - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} + (\alpha - \frac{\pi}{4})) = -\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$$

$$-\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

یعنی:

مطابق اتحاد $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha)$ داریم:

$$\cos 2(\alpha - \frac{\pi}{4}) = 1 - 2\sin^2(\alpha - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = \pm 1$$

تنها $\cos 2\alpha = 1$ در گزینه‌ها موجود است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

می‌دانیم $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ است، پس:

۶۸

$$\cos 2x = 2\sin^2 x \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = 2\sin^2 x$$

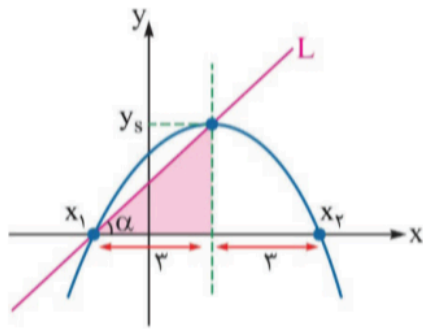
$$\Rightarrow 2\sin^2 x + 2\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow (\sin^2 x + 1)(2\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = -1 & \times \\ \sin^2 x = \frac{1}{2} & \checkmark \end{cases}$$

حالا با استفاده از اتحاد $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ داریم:

$$\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



طول راس سهمی با معادله $y = -x^2 + 4x + m$ برابر است با: $x_S = -\frac{4}{2(-1)} = 2$
حالا با توجه به نمودار سهمی داریم:

$$x_1 = x_S - 3 = 2 - 3 = -1, x_2 = x_S + 3 = 2 + 3 = 5$$

از طرفی می‌دانیم حاصل ضرب ریشه‌های سهمی $y = -x^2 + 4x + m$ برابر
 $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m$ است، پس:

$$x_1 x_2 = -m \Rightarrow -1 \times 5 = -m \Rightarrow m = 5$$

پس معادله سهمی به صورت $y = -x^2 + 4x + 5$ می‌باشد و با قرار دادن $x_S = 2$ در آن y_S را به دست می‌آوریم:

$$y_S = -(2)^2 + 4(2) + 5 = 9$$

$$m_1 = \frac{9 - 0}{2 - (-1)} = 3$$

حالا شیب خط را به دست می‌آوریم:

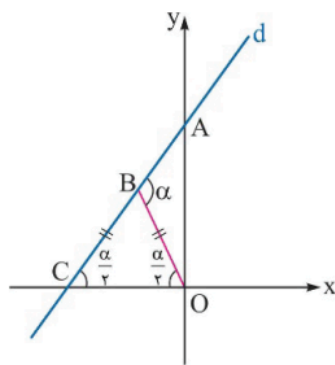
در ضمن می‌دانیم $\tan \alpha = m_1$ است، پس $\tan \alpha = 3$ است و با استفاده از اتحاد $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ داریم:

$$\sin 2\alpha = \frac{2(3)}{1 + 3^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \tan(\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right) = \tan \alpha - \sin 2\alpha$$

$$= 3 - \frac{3}{5} = \frac{12}{5} = 2 \frac{2}{5}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



پله اول: طبق صورت سوال $BC = BO$ است، پس زوایای $\hat{BCO}$ و $\hat{BOC}$ با هم برابرند. همچنین می‌دانیم در هر مثلث هر زاویه خارجی برابر با مجموع زوایای داخلی غیر مجاور است، پس با فرض $\hat{BCO} = \hat{BOC} = \theta$ داریم:

$$\alpha = \theta + \theta \Rightarrow \alpha = 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{2}$$

پله دوم: پس شیب خط d برابر $\tan \frac{\alpha}{2}$ است، در نتیجه:

$$d: 4x - 3y + 24 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 8 \Rightarrow m = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{3}$$

پله سوم: همچنین می‌دانیم $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ است، پس:

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2 \times \frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\frac{8}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = -\frac{24}{7}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۱

پله اول: با تغییر متغیر $t = \cos^3 x$ در معادله $2 \cos^3 x - 7 \cos^3 x + 3 = 0$ داریم:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta=25} \begin{cases} t = \frac{7 + \sqrt{25}}{2 \times 2} = 3 \\ t = \frac{7 - \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

پله دوم: می‌دانیم $\cos^3 x = 3$ فاقد ریشه است، پس $\cos^3 x = \frac{1}{2}$ است و داریم:

$$\cos^3 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \xrightarrow[k=0,1]{x \in (0,\pi)} x = \frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9} \\ 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9} \xrightarrow[k=1]{x \in (0,\pi)} x = \frac{5\pi}{9} \end{cases}$$

پس کمترین فاصله بین دو مقدار از جواب‌های معادله در بازه $(0, \pi)$ برابر $\frac{7\pi}{9} - \frac{5\pi}{9} = \frac{2\pi}{9}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۲

می‌دانیم $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ است، پس:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow 1 + \tan^2 x = 1 + \tan x$$

$$\Rightarrow \tan^2 x - \tan x = 0 \Rightarrow \tan x (\tan x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi \\ \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$0 + \pi + 2\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{9\pi}{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۳

ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\log_{\sin x}^{\cos x} + \log_{\cos x}^{\sin x} = 2 \Rightarrow \log_{\sin x}^{\cos x} + \frac{1}{\log_{\sin x}^{\cos x}} = 2$$

حالا با تغییر متغیر $\log_{\sin x}^{\cos x} = t$ داریم:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow \log_{\sin x}^{\cos x} = 1 \Rightarrow \cos x = \sin x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

به‌ازای $x = \frac{5\pi}{4}$ ، مبنا و عبارت جلوی $\log_{\cos x}^{\sin x}$ منفی می‌شود، پس این ریشه غیرقابل قبول است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۴

با توجه به رابطهٔ طلایی $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a\sqrt{1 - \cos 2bx} = a\sqrt{2\sin^2 bx} = a\sqrt{2}|\sin bx|$$

در ضمن بیشترین مقدار تابع $f(x) = a\sqrt{2}|\sin bx|$ به‌ازای $|\sin bx| = 1$ به‌دست می‌آید و برابر $a\sqrt{2}$ می‌باشد و چون نمودار همواره بالای محور x ها قرار دارد، پس $a > 0$ بوده و با توجه به نمودار بیشترین مقدار تابع برابر ۴ است، پس:

$$a\sqrt{2} = 4 \Rightarrow a\sqrt{2} = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

از طرفی دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{\pi}{|b|}$ است و با توجه به نمودار $2T = \pi$ می‌باشد، بنابراین:

$$T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \rightarrow a^2 b^2 = (2\sqrt{2})^2 (2)^2 = 32$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۵

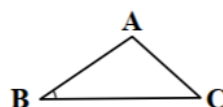
نکته: $\tan x \times \cot x = 1$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{2}{\sin x} = \frac{-3}{\cos x} \Rightarrow 2\cos x = -3\sin x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{-3} \Rightarrow \tan x = -\frac{2}{3} \Rightarrow \cot x = -\frac{3}{2}$$

$$\tan x + \cot x = -\frac{2}{3} - \frac{3}{2} = \frac{-13}{6} \quad \text{بنابراین:}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۶



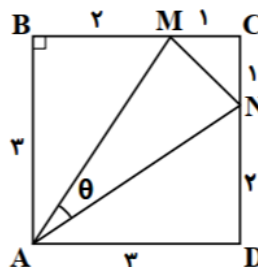
$$S = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{B}$$

نکته: مساحت مثلث ABC برابر است با:

با توجه به شکل زیر، مساحت مثلث AMN قابل محاسبه است:

$$S_{AMN} = S_{ABCD} - (S_{ABM} + S_{MCN} + S_{AND}) = 3 \times 3 - \left(\frac{2 \times 2}{2} + \frac{1 \times 1}{2} + \frac{2 \times 3}{2} \right) \Rightarrow S_{AMN} = 9 - \left(\frac{13}{2} \right) = \frac{5}{2} \quad (*)$$

از طرفی طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث‌های AND و ABM داریم:



$$AM = AN = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \times AM \times AN \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{13} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 13 \times \sin \theta$$

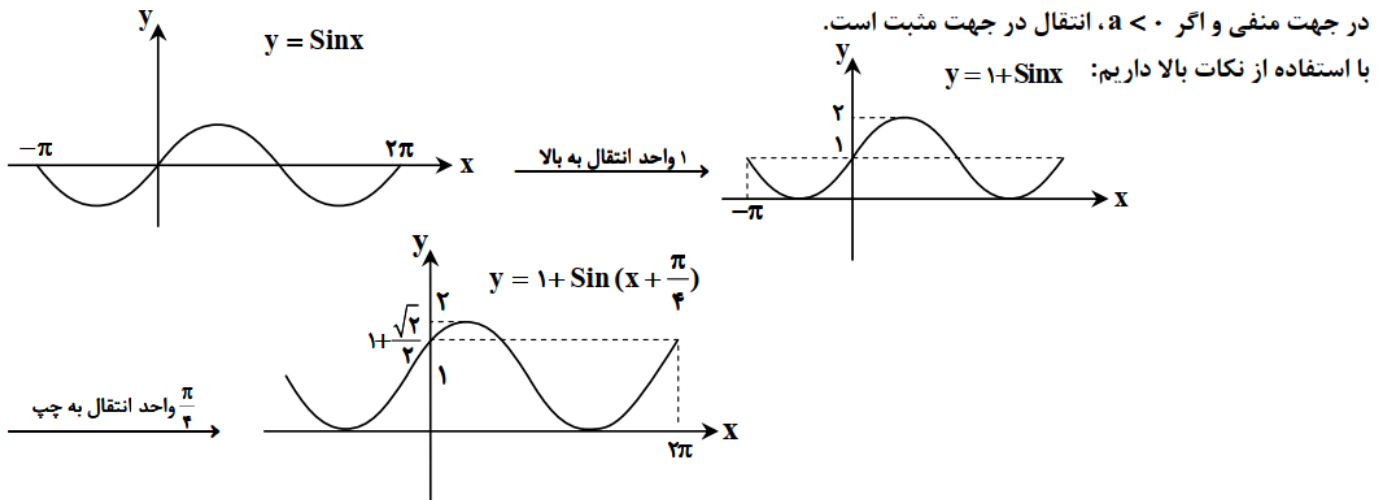
$$\frac{13}{2} \sin \theta = \frac{5}{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{5}{13}$$

حال با توجه به (*) داریم:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + a$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را a واحد در راستای محور y ها انتقال دهیم. اگر $a > 0$ ، انتقال در جهت مثبت و اگر $a < 0$ ، انتقال در جهت منفی است.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(x + a)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را a واحد در راستای محور x ها انتقال دهیم. اگر $a > 0$ ، انتقال در جهت منفی و اگر $a < 0$ ، انتقال در جهت مثبت است.



همان طور که ملاحظه می کنید خط $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ در ۳ نقطه از بازه $[0, 2\pi]$ نمودار تابع $f(x)$ را قطع می کند.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\left. \begin{aligned} \max &= |a| + 1 = -a + 1 \\ T &= \frac{2\pi}{\left| \frac{\pi}{a-1} \right|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{-a+1}} = 2(-a+1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{(-a+1) \times 2(-a+1)}{2} = 9$$

$$\Rightarrow (-a+1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} 1-a=3 \\ 1-a=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \checkmark \\ a=4 \text{ غلط} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = -2 \cos\left(-\frac{\pi}{3}x\right) + 1 = -2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1$$

$$f(2) = -2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$1 \cdot \cos 2\alpha - 1 \cdot \tan \alpha = 1 \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 \alpha - 1 - 1 \cdot \tan \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot}{1 + \tan^2 \alpha} - 1 \cdot \tan \alpha = 1$$

با فرض $t = \tan \alpha$ تساوی به صورت زیر درمی آید:

$$t = \tan \alpha \Rightarrow \frac{2 \cdot}{1 + t^2} - 1 \cdot t - 1 = 0$$

$$1 \cdot t^2 + 1 \cdot 1t + 1 \cdot t - 9 = 0 \Rightarrow (2t-1)(\underbrace{\Delta t^2 + 1t + 9}_{\Delta < 0}) = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \cos 2\alpha - 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$$

بنابراین $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ، در نتیجه:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

نکته: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

۸۰

نکته: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$

ابتدا عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{3\sin\left(\pi + \frac{\pi}{9}\right) + 5\cos\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{9}\right)} = \frac{-3\sin\frac{\pi}{9} - 5\cos\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{9}} = \frac{-3\sin\frac{\pi}{9} - 5\cos\frac{\pi}{9}}{2\cos\frac{\pi}{9}} = -\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{9} - \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} -\frac{3}{2}a - \frac{5}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

برای دامنه تابع $f(x)$ خواهیم داشت: $\left(\tan x, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

۸۱

$$\frac{\pi + \pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cancel{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi x}{2} \neq k\pi + \cancel{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow x \neq 2k \quad (1)$$

$$4 - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-2, 2) \quad (2)$$

از طرفی داریم:

$$(1) \cap (2) \Rightarrow (-2, 2) - \{0\} \Rightarrow (-2, 0) \cup (0, 2) \quad (2 \text{ بازه به طول } 2)$$

پس $b = a = 2$ خواهند بود. در تابع $g(x)$ جایگذاری خواهیم کرد.

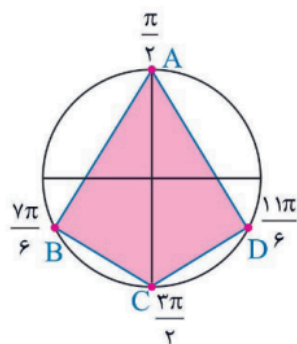
$$\frac{\cos 2x - 4\cos x + 3}{2\cos^2 x - 1} = \frac{2\cos^2 2x - 4\cos x + 2}{-(1 - \cos x)} = \frac{2(\cos x - 1)^2}{-(1 - \cos x)}$$

$$\underline{1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha} \quad 2\left(-2\sin^2 \frac{x}{2}\right)^2 = 4\sin^4 \frac{x}{2} \quad T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

می‌دانیم $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = \cos x$ است.

۸۲



$$\sin 2x + \cos x = 0 \rightarrow 2\sin x \cos x + \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\sin x + 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ 2\sin x + 1 = 0 \rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

$$A\left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

$$B\left(\cos \frac{7\pi}{6}, \sin \frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$C\left(\cos \frac{3\pi}{2}, \sin \frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$$

$$D\left(\cos \frac{11\pi}{6}, \sin \frac{11\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$AB = AD = \sqrt{3}, \quad BC = CD = 1$$

بنابراین محیط این شکل برابر است با:

$$ABCD \text{ محیط} = AB + BC + CD + AD = 2AB + 2BC = 2\sqrt{3} + 2$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۸۳

طرفین فرض را بر $\sin^2 x \cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$\frac{\sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{6 \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 5 \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 6 \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 5 \Rightarrow \tan^2 x + 6 \cot^2 x = 5$$

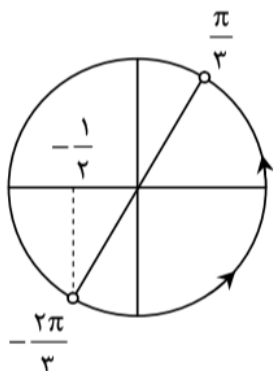
$$\tan^2 x = t \Rightarrow t + \frac{6}{t} = 5 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$$

اکنون با تغییر متغیر $\tan^2 x = t$ ، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \tan^2 x = 2 \xrightarrow{x \text{ در ربع اول}} \tan x = +\sqrt{2} \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \tan x + \cot x = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ t = 3 \Rightarrow \tan^2 x = 3 \xrightarrow{x \text{ در ربع اول}} \tan x = +\sqrt{3} \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan x + \cot x = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

با توجه به آنکه $\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ بیشتر از $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ است، پس حداکثر مقدار آن $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



۸۴

ابتدا حدود $2\alpha - \frac{\pi}{3}$ را به کمک فرض داده شده به دست می‌آوریم:

$$-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\times 2} -\frac{\pi}{3} < 2\alpha < \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{-\frac{\pi}{3}} -\frac{2\pi}{3} < 2\alpha - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}$$

وقتی زاویه $2\alpha - \frac{\pi}{3}$ بر روی دایره مثلثاتی در بازه $(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ قرار می‌گیرد، آن‌گاه نابرابری زیر برقرار می‌شود:

$$-\frac{1}{2} < \cos(2\alpha - \frac{\pi}{3}) \leq 1$$

پس:

$$-\frac{1}{2} < \frac{2m-1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} -2 < 2m-1 \leq 4 \xrightarrow{+1} -1 < 2m \leq 5 \xrightarrow{\div 2} -\frac{1}{2} < m \leq \frac{5}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

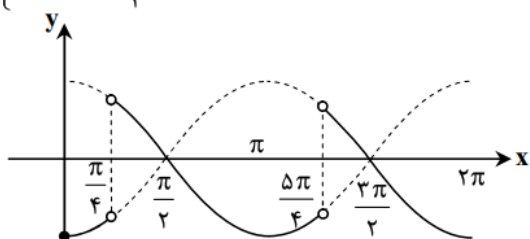
ضابطه تابع به صورت $y = \frac{\sin x - \cos x}{|\sin x - \cos x|} \cos x$ است. می دانیم از وسط ربع اول تا وسط ربع سوم دایره مثلثاتی، $\sin x \geq \cos x$ و در مابقی دایره مثلثاتی $\sin x < \cos x$ ، یعنی:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \sin x > \cos x \Rightarrow \sin x - \cos x > 0 \Rightarrow \frac{\sin x - \cos x}{|\sin x - \cos x|} = 1 \\ \frac{5\pi}{4} < x < \frac{9\pi}{4} \Rightarrow \sin x < \cos x \Rightarrow \sin x - \cos x < 0 \Rightarrow \frac{\sin x - \cos x}{|\sin x - \cos x|} = -1 \end{cases}$$

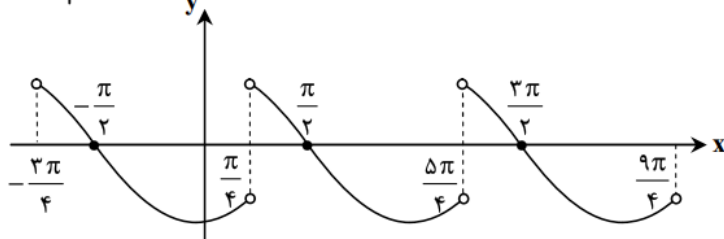
بنابراین ضابطه تابع مورد نظر در بازه $[0, 2\pi)$ به صورت زیر است:

$$y = \begin{cases} -\cos x & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \cos x & \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \\ -\cos x & \frac{5\pi}{4} < x < 2\pi \end{cases}$$

با توجه به نمودار $y = \cos x$ ، نمودار تابع مورد نظر در یک دوره تناوب آن به صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع مورد نظر به صورت زیر است:



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

ابتدا بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = a + 6 \sin \frac{\pi}{3} x$ را به دست می آوریم:

$$\max = a + 6, \quad \min = a - 6$$

بنابراین دو حالت زیر پدید می آید:

$$|\max| \geq |\min| \Rightarrow \max(f) = |a + 6| + 2a$$

$$|\min| \geq |\max| \Rightarrow \max(f) = |a - 6| + 2a$$

بنابراین داریم:

$$|a + 6| \geq |a - 6| \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2 + 12a + 36 \geq a^2 - 12a + 36 \Rightarrow a \geq 0$$

$$|a + 6| + 2a = 15 \Rightarrow |a + 6| = 15 - 2a \xrightarrow{15 - 2a \geq 0, a \leq 7.5} \begin{cases} a + 6 = 15 - 2a \Rightarrow a = 3 \checkmark \\ a + 6 = 2a - 15 \Rightarrow a = 21 \times \end{cases}$$

$$|a + 6| \leq |a - 6| \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2 + 12a + 36 \leq a^2 - 12a + 36 \Rightarrow a \leq 0$$

$$|a - 6| + 2a = 15 \Rightarrow |a - 6| = 15 - 2a \xrightarrow{15 - 2a \geq 0, a \leq 7.5} \begin{cases} a - 6 = 15 - 2a \Rightarrow a = 7 \times \\ a - 6 = 2a - 15 \Rightarrow a = 9 \times \end{cases}$$

پس برای a فقط یک مقدار $a = 3$ به دست می آید.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۸۷

نکته: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad \text{نکته:}$$

عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 x - \sin^2 x}} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sqrt{\sin^2 x(1 - \sin^2 x)}}$$

$$= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sqrt{\sin^2 x \cos^2 x}} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2|\sin x \cos x|}$$

چون $0^\circ < x < 90^\circ$ ، پس $\cos x > 0$ و $\sin x > 0$ ، پس $\sin x \cos x < 0$ داریم:

$$A = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x} = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = |\sin x - \cos x|$$

چون در ناحیه دوم، مقدار سینوس مثبت و مقدار کسینوس منفی است؛ بنابراین $\sin x - \cos x > 0$ و در نتیجه $A = \sin x - \cos x$.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۸۸

نکته: $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$

$$\sqrt{u^2} = |u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases} \quad \text{نکته:}$$

برای ساده شدن رادیکال‌ها، صورت و مخرج هر کسر را در مزدوج مخرج آن ضرب می‌کنیم:

$$A = \sqrt{\frac{(1 + \cos \alpha)^2}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}} - \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{(1 + \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} = \left| \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right| - \left| \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right|$$

چون $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ ، پس $1 - \cos \alpha \geq 0$ و $1 + \cos \alpha \geq 0$ ، از طرفی چون α در ربع اول یا دوم قرار دارد، $\sin \alpha > 0$ ، بنابراین:

$$A = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha - 1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2\cot \alpha$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۸۹

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \Delta \cos x \xrightarrow{\times \cos x}$$

$$1 - \sin x = \Delta \cos^2 x \rightarrow 1 - \sin x = \Delta(1 - \sin^2 x)$$

$$1 - \sin x = \Delta(1 - \sin x)(1 + \sin x)$$

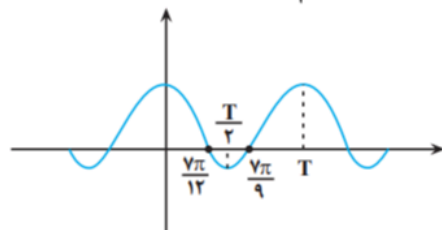
اگر $\sin x = 1$ باشد، آنگاه $\cos x = 0$ خواهد بود که ریشه مخرج است، بنابراین با توجه به اینکه $\sin x \neq 1$ ، داریم:

$$\Delta + \Delta \sin x = 1 \rightarrow \sin x = \frac{-4}{\Delta} \xrightarrow{\tan x < 0} \cos x = \frac{3}{\Delta}$$

توجه داشته باشید که $\tan x < 0$ و $\sin x < 0$ ، بنابراین x در ناحیه چهارم قرار داشته و $\cos x > 0$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۰

مطابق شکل تابع در فاصله $[0, T]$ تکرار می‌شود (T دوره تناوب) همچنین در $[0, \frac{T}{2}]$ مقدار تابع از ماکزیمم به مینیمم خود می‌رسد، پس $\frac{T}{2}$ میانگین ریشه‌های تابع است یعنی:

$$\frac{T}{2} = \frac{\frac{7\pi}{12} + \frac{7\pi}{9}}{2} \rightarrow T = \frac{49\pi}{36}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۱

با رسم موارد گفته شده خواهیم دید که در گزینه «۴» نمودار به دست آمده منطبق نیست اما بررسی جبری راهکار مناسب تری می باشد، به طوری که داریم:

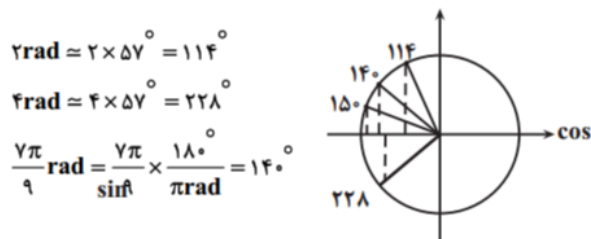
$$۱) \sin(x - \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{\text{چپ } \frac{3\pi}{4}} \sin(x + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به X ها}} -\cos x \quad \checkmark$$

$$۲) \sin(x - \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به y ها}} \sin(-x - \frac{\pi}{4}) = -\sin(x + \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{\text{چپ } \frac{\pi}{4}} -\sin(x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = -\cos x \quad \checkmark$$

$$۳) \sin(x - \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{\text{راست } \frac{\pi}{4}} \sin(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x \quad \checkmark$$

$$۴) \sin(x - \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{\text{راست } \frac{3\pi}{4}} \sin(x - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \sin(x - \pi) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به X ها}} -\sin(x - \pi) = \sin(\pi - x) = \sin x \quad \times$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



ابتدا تمام زوایا را به درجه تبدیل می کنیم. (هر ۱ رادیان، حدود ۵۷ درجه است.)

۹۲

هر ۴ زاویه را در دایره مثلثاتی مشخص می کنیم. از دایره مقابل مشخص است که منفی ترین $\cos$ را زاویه ۱۵۰° دارد پس قدرمطلق آن از همه بزرگتر است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\text{نکته: } \tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x, \quad \tan(\pi + x) = \tan x$$

$$\text{نکته: } \tan x \cdot \cot x = ۱$$

۹۳

ابتدا با توجه به تساوی $x + y = \frac{\pi}{4}$ ، هریک از عبارت ها را ساده می کنیم:

$$\begin{cases} \tan(3x + 2y) = \tan(2(x + y) + x) = \tan(2(\frac{\pi}{4}) + x) = \tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x \\ \tan(4x + 4y) = \tan(4(x + y) + x) = \tan(4(\frac{\pi}{4}) + x) = \tan(\pi + x) = \tan x \end{cases}$$

با جای گذاری این مقادیر داریم:

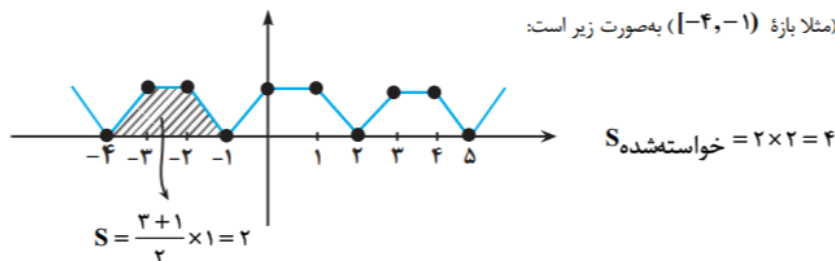
$$A = (-\cot x)(\tan x) = -۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

نمودار تابع را رسم می کنیم. (در بازه های داده شده) با توجه به اینکه تابع متناوب و با دوره تناوب برابر ۳ است و بازه $[۸, ۱۴]$ دو دوره تناوب تابع است و با توجه به اینکه مساحت در هر دوره تناوب مقدار ثابتی است لذا نمودار تابع را در یک دوره تناوب رسم و مساحت را محاسبه و مقدار را دو برابر می کنیم

۹۴

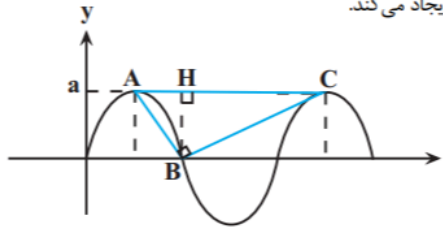
با توجه به نمودار زیر و اینکه $T = ۳$ است، شکل تابع در یک دوره تناوب (مثلا بازه $[-۴, -۱]$) به صورت زیر است:



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۵

دوره تناوب برابر $\frac{2\pi}{2} = \pi$ است. در مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین دو قطعه‌ای است که روی وتر ایجاد می‌کند.



$$BH^2 = AH \times CH, AH = \frac{T}{4} = 1, CH = \frac{3T}{4} = 3 \quad a^2 = 1 \times 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۶

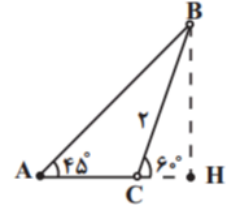
ابتدا باید مثلث را با توجه به اطلاعات صورت سوال رسم کنیم. چون شیب خط AB برابر یک بوده و AC یک خط افقی است پس $\hat{A} = 45^\circ$ و $\hat{C} = 120^\circ$. حال از B به امتداد AC عمود کرده و پای عمود را H می‌نامیم. سپس براساس شکل در مثلث BCH داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{CH}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow CH = 1$$

$$AH = BH = \sqrt{3} \quad \text{حال با توجه به اینکه } \hat{A} = 45^\circ \text{ است:}$$

$$\Rightarrow AC = AH - CH = \sqrt{3} - 1$$



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۷

دوره تناوب تانژانت و سینوس برابر هستند.

$$\frac{2\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|b|} \rightarrow |a| = 2|b| \xrightarrow{a, b > 0} a = 2b$$

$$f(0) = g(0) \rightarrow m = n$$

$$y_{\min} = -|2| + m = 0 \rightarrow m = 2 \rightarrow n = 2$$

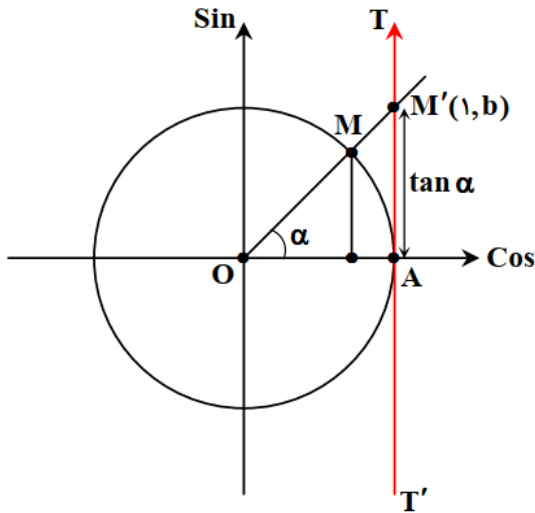
$$\frac{(2(2) - 2)2b}{b} = 4$$

مقدار تابع‌ها در $x = 0$ برابرند پس:

از طرفی در نمودار تابع سینوس مقدار مینیمم تابع صفر است پس:

$$\text{حاصل } \frac{(2m - n)a}{b} \text{ برابر است با:}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



نکته: در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است. اگر زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر بگیریم و پاره خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند، آن‌گاه:

$$\tan \alpha = AM' = b$$

می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α ، به‌همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود؛ بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

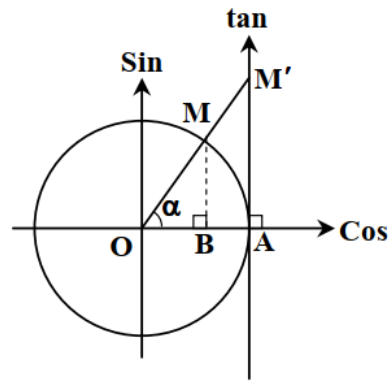
از نقطه M بر محور افقی (کسینوس‌ها) عمود می‌کنیم. می‌دانیم $OB = \cos \alpha$ ، $MB = \sin \alpha$ و $AM' = \tan \alpha$. ضمناً شعاع دایره مثلثاتی برابر یک است، پس $OM = OA = 1$.

با توجه به اینکه دو پاره خط AM' و MB موازی هستند، با استفاده از قضیه تالس در مثلث OAM' داریم:

$$\frac{OM}{MM'} = \frac{OB}{BA} \Rightarrow \frac{1}{MM'} = \frac{\cos \alpha}{OA - OB} \Rightarrow \frac{1}{MM'} = \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \Rightarrow MM' = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{AM'}{MM'} = \frac{\tan \alpha}{\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

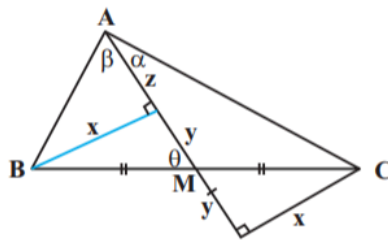
از نقاط B و C بر AM (و امتداد آن) عمود می‌کنیم تا شکل زیر به‌دست آید:
در شکل بالا داریم:

$$\tan \alpha = \frac{x}{2y + z} \Rightarrow \frac{x}{2y + z} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 4y + 2z \Rightarrow 15x = 20y + 10z \quad (1)$$

$$\tan \beta = \frac{x}{z} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4x = 5z \Rightarrow 8x = 10z \quad (2)$$

اگر رابطه (۲) را از (۱) کم کنیم، به رابطه زیر می‌رسیم:

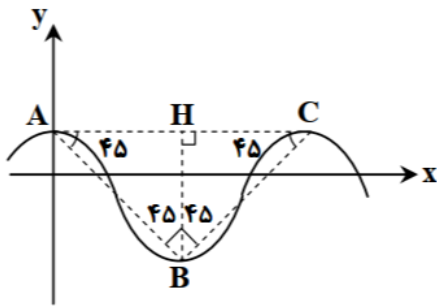
$$7x = 20y \Rightarrow \tan \theta = \frac{x}{y} = \frac{20}{7}$$



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: در تابع $y = a \cos(bx) + c$ دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ ، مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ است.

با توجه به شکل مقابل، طول ضلع AC برابر با دوره تناوب تابع است. از طرفی $BA = BC$ ، پس مثلث ABC قائم الزاویه و متساوی الساقین است، پس داریم:



$$y = 2\cos(bx) - 3 \Rightarrow \text{Max} = 2 - 3 = -1, \text{Min} = -2 - 3 = -5$$

$$BH = |\text{Max}| + |\text{Min}| = 1 + 4 = 5$$

مثلث BCH نیز قائم الزاویه و متساوی الساقین است، بنابراین:

$$CH = BH \Rightarrow CH = 5 \Rightarrow AC = 2CH = 2 \times 5 = 10 \Rightarrow T = 10$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 10 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{5} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

نکته: تابع $y = a \sin bx + c$ دارای ماکزیمم $|a| + c$ ، مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

ضابطه تابع به صورت $y = a \sin(\pi x + \frac{\pi}{6}) + c$ است.

با توجه به نمودار، طول نقطه A برابر دوره تناوب تابع است.

$$T = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2 \Rightarrow x_A = 2$$

از طرفی مقدار ماکزیمم تابع برابر ۵ و مقدار مینیمم آن برابر ۱ است، یعنی داریم:

$$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 3, |a| = 2$$

با توجه به نزولی بودن تابع در $x = 0$ ، مقدار منفی است، پس $a = -2$ و ضابطه تابع به صورت $y = -2 \sin(\frac{\pi}{6} + \pi x) + 3$ است. عرض

نقطه A با عرض نقطه‌ای به طول صفر برابر است. پس:

$$y_A = f(0) = -2 \sin \frac{\pi}{6} + 3 = -2 \times \frac{1}{2} + 3 = 2$$

$$x_A \times y_A = 2 \times 2 = 4$$

بنابراین حاصل ضرب طول و عرض نقطه A برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۲

$$f(x) = a + \sin^2 b\pi x = a + \left(\frac{1 - \cos 2b\pi x}{2}\right) \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2} \cos(2b\pi x) + a + \frac{1}{2}$$

باتوجه به نکته داریم:

باتوجه به نمودار و مختصات نقطه $A(4, 1)$ ، مشخص است که مینیمم تابع برابر یک است. بنابراین:

$$a + \frac{1}{2} - \left| -\frac{1}{2} \right| = 1 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی دوره تناوب تابع برابر ۴ است؛ بنابراین:

$$T = \frac{2\pi}{|2b\pi|} = 4 \Rightarrow \frac{1}{|b|} = 4 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4}$$

(علامت b بی‌اثر است.)

پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{3}{2}$ است و نقطه $\left(4, \frac{3}{2}\right)$ روی f است. زیرا:

$$f(4) = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۳

باتوجه به اتحاد مثلثاتی $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ داریم:

$$\cos^2 3x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 3x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 3x = \sin^2 x \Rightarrow \cos 3x = \pm \sin x$$

اکنون معادلات مثلثاتی $\cos 3x = -\sin x$ و $\cos 3x = \sin x$ را در بازه $(0, \pi)$ حل می‌کنیم:

$$\cos 3x = \sin x \Rightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \xrightarrow{x \in (0, \pi)} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$\cos 3x = -\sin x \Rightarrow \cos 3x = \sin(-x) \Rightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \\ 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \end{cases} \xrightarrow{x \in (0, \pi)} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

پس معادله داده شده ۶ جواب در بازه $(0, \pi)$ دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۴

نکته: از روابط $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ و $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی 15° ، $22/5^\circ$ و... را محاسبه کنیم.

با توجه به نکته بالا از رابطه $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\alpha = 15^\circ \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \xrightarrow{\cos 15^\circ > 0} \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\alpha = 22/5^\circ \Rightarrow \cos^2 22/5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\cos 22/5^\circ > 0} \cos 22/5^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

اکنون با جای‌گذاری مقادیر بالا، حاصل عبارت A را محاسبه می‌کنیم:

$$A = (\sqrt{2} - \sqrt{2})(\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{4-2}}{2} + \frac{\sqrt{4-3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۵

نکته ۱: توابع $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ ، مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

نکته ۲: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

نکته ۳: $\cos^2 \alpha \neq 2 \sin^2 \alpha$

ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a \sin^2 x \cos^2 x = a (\sin x \cos x)^2 = a \times (\frac{1}{2} \sin 2x)^2 = \frac{a}{4} \sin^2 2x = \frac{a}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = \frac{a}{8} (1 - \cos 4x) \\ = \frac{-a}{8} \cos 4x + \frac{a}{8}$$

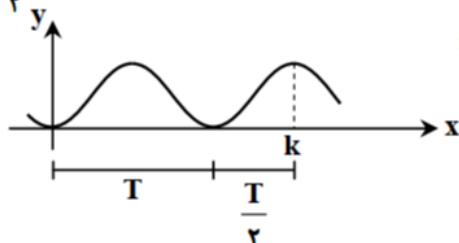
با توجه به نمودار تابع، $-\frac{a}{8} < 0$ است، پس a حتماً عددی مثبت است. از آنجا که ماکزیمم تابع برابر ۳ است، داریم:

$$\left| \frac{-a}{8} \right| + \frac{a}{8} = 3 \Rightarrow \frac{a}{8} + \frac{a}{8} = 3 \Rightarrow \frac{a}{4} = 3 \Rightarrow a = 12$$

$$T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$$

دوره تناوب این تابع برابر است با:

با توجه به نمودار، تابع در بازه $[0, k]$ ، $\frac{3}{2}$ دوره تناوب خود را طی کرده است؛ زیرا:



$$k = \frac{T}{2} + T = \frac{3T}{2} = 3 \times \frac{\pi}{4}$$

بنابراین:

$$a \times k = 12 \times \frac{3\pi}{4} = 9\pi$$

پس مقدار خواسته شده برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۶

نکته ۱: جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = 2k\pi + \pi - \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

نکته ۲: جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

چون $x = \frac{\pi}{3}$ یکی از جواب‌های معادله است، پس در معادله صدق می‌کند؛ یعنی: $\sin \frac{\pi}{3} + k \cos \frac{\pi}{3} = 1 + \sin \frac{2\pi}{3}$

با توجه به آنکه $\sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3}$ ؛ پس: $k \cos \frac{\pi}{3} = 1 \Rightarrow \frac{k}{2} = 1 \Rightarrow k = 2$

به این ترتیب معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin x + 2 \cos x - 2 \sin x \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x - 1 + 2 \cos x (1 - \sin x) = 0$$

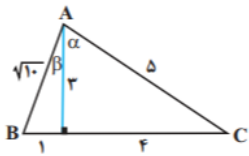
$$(1 - \sin x)(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین جواب در بازه $(0, 2\pi)$ برابر $\frac{4\pi}{3}$ است.

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

با توجه به آن که α و β حاده هستند، پس $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ و به شکل زیر می‌رسیم:

با توجه به آن که در شکل بالا $AC = BC$ ، پس: $\hat{A} = \hat{B} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \tan(\hat{B}) = \frac{3}{1} = 3$

۱۰۷

با فرض $A = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} - \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ داریم:

۱۰۸

$$A^2 = \frac{1-\sin x}{1+\sin x} + \frac{1+\sin x}{1-\sin x} - 2 \quad (A < 0 \text{ که دقت کنید که})$$

$$= \frac{(1-\sin x)^2 + (1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x} - 2 = \frac{2+2\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2 = \frac{2}{\cos^2 x} + 2 \tan^2 x - 2 = 2(1 + \tan^2 x) + 2 \tan^2 x - 2 = 4 \tan^2 x = 4(7) = 28 \quad A = -2\sqrt{7}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰۹

ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$y = b \sin(\alpha \pi x - \pi) - 1 = -b \sin(\alpha \pi x) - 1$$

با توجه به آن‌که تابع حول $x = 0$ صعودی است، پس:

$$(-b) \times \alpha > 0 \rightarrow \alpha b < 0$$

حداقل تابع برابر با -3 است، بنابراین:

$$-|b| - 1 = -3 \rightarrow |b| = 2$$

می‌توانیم فرض کنیم b منفی و α مثبت است. پس $b = -2$ و صورت تابع به شکل زیر می‌شود:

$$y = 2 \sin(\alpha \pi x) - 1$$

می‌دانیم که تابع $\sin$ در $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ حداکثر می‌شود. نمودار داده شده در $x = 4$ برای دومین بار حداکثر می‌شود. پس:

$$\alpha \pi \times 4 = 2\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

بنابراین:

$$\frac{\alpha}{b} = \frac{\frac{5}{8}}{-2} = \frac{-5}{16}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\cos 53^\circ = 0/6$$

$$\cos 106^\circ = 2 \cos^2 53^\circ - 1 = 2 \times 0/6^2 - 1 = 2 \times 0/36 - 1 = -0/28$$

$$\sin 16^\circ = 0/28$$

پس داریم:

$$\Rightarrow \cos 32^\circ = 1 - 2 \sin^2 16^\circ = 1 - 2(0/28)^2 = 1 - 2 \times 0/0784 = 1 - 0/1568 = 0/8432$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱۱

سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم.

$$8 \cos^2 x (\cos^2 x - 1) + 1 = -8 \sin^2 x \cos^2 x + 1 = -2 \sin^2 2x + 1 = \cos^2 2x$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x = \frac{1}{2}$$

در نتیجه:

این معادله روی بازه $[0, 2\pi]$ هشت ریشه دارد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

عبارت $x = 2k\pi - \frac{3\pi}{2}$ معادل $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ است. با جایگذاری $x = \frac{\pi}{2}$ در معادله داده شده، مقدار k به دست می آوریم:

$$3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi) = k \Rightarrow k = 2$$

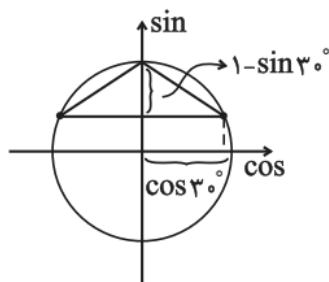
حال با استفاده از اتحاد $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ، معادله را بازنویسی می کنیم:

$$3\sin x + (1 - \sin^2 x) = 2 \Rightarrow \sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (3\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

مطابق شکل روبه‌رو، مساحت مثلث برابر است با:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{ارتفاع}}{\text{قاعده}} \right) \times (1 - \sin 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا طرفین تساوی صورت سؤال را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{15}{9} \Rightarrow 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{5}{3} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

گام دوم: می‌رویم سراغ عبارت مجهول سؤال و شروع می‌کنیم به ساده کردن:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \underbrace{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{\text{فاکتور می‌گیریم}} = 1 - \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - (\sin \alpha \cos \alpha)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

گام سوم: از گام اول به دست آورده بودیم که $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۱۴

پاسخ تشریحی گام اول: این را می دانیم که:

$$\tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \quad (*)$$

پس هدف محاسبه $\sin \theta \cos \theta$ است.گام دوم: عبارت $\sin \theta + \cos \theta$ را x می گیریم، داریم:

$$x^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{x^2 - 1}{2}$$

گام سوم: حال تساوی داده شده در صورت سؤال را بسط می دهیم:

$$(1 + \cos \theta)(1 + \sin \theta) = \frac{32}{25} \Rightarrow \sin \theta + \cos \theta + \sin \theta \cos \theta + 1 = \frac{32}{25} \Rightarrow \sin \theta + \cos \theta + \sin \theta \cos \theta = \frac{7}{25}$$

$$x + \frac{x^2 - 1}{2} = \frac{7}{25} \Rightarrow x^2 + 2x = \frac{39}{25} \xrightarrow{+1} x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = \frac{64}{25} \quad \text{گام چهارم: تساوی های گام دوم را جای گذاری می کنیم:}$$

$$\Rightarrow x + 1 = \pm \frac{8}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5} \text{ یا } x = -\frac{13}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

حواسمان هست که $90^\circ < \theta < 135^\circ$ است، پس طبق درس نامه و شکل تعبیر $|\sin \theta| > |\cos \theta|$ و در نتیجه x مثبت است.

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{x^2 - 1}{2} = -\frac{8}{25} \xrightarrow{*} \tan \theta + \cot \theta = -\frac{25}{8} \quad \text{گام پنجم:}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۱۵

پاسخ تشریحی گام اول:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{7}{9} \Rightarrow (\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{9} \xrightarrow{x \text{ ربع دوم است}} \sin x \cos x = -\frac{1}{3}$$

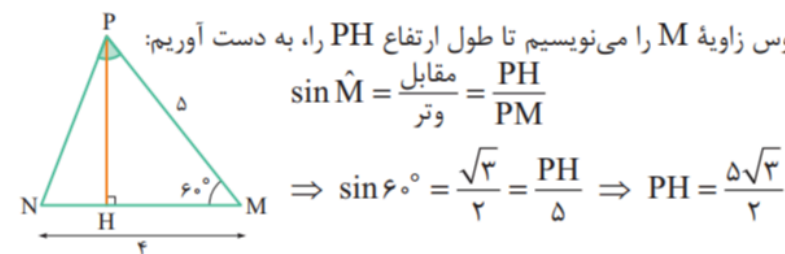
$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x + \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{گام دوم:}$$

در بازه $180^\circ < x < 135^\circ$ ، قدرمطلق $\cos$ بیشتر است ($|\cos x| > |\sin x|$). پس $\sin x + \cos x$ منفی است.

$$A = \frac{1}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)} \quad \text{گام سوم: عبارت } A \text{ را ساده می کنیم:}$$

$$A = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}(1 + \frac{1}{3})} = -\frac{3}{4}\sqrt{3} \quad \text{گام چهارم: مقادیر عبارت ها را جای گذاری می کنیم:}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



گام دوم: حال مساحت مثلث MNP را حساب می‌کنیم:

$$S_{MNP} = \frac{1}{2} MN \cdot PH = \frac{1}{2} (4) \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} \right) = 5\sqrt{3}$$

و اگر این مساحت را با کمک سینوس زاویه P بنویسیم، داریم:

$$S = \frac{1}{2} MP \cdot PN \sin \hat{P} = 5\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} (5) PN \sin \hat{P} = 5\sqrt{3} \Rightarrow \sin \hat{P} = \frac{2\sqrt{3}}{PN}$$

گام سوم: پس برای محاسبه سینوس زاویه P، به طول ضلع PN نیاز داریم. برای محاسبه طول ضلع PN هم به طول ضلع NH نیاز داریم تا

از قضیه فیثاغورس استفاده کنیم:

$$PN = \sqrt{NH^2 + PH^2} = \sqrt{NH^2 + \frac{75}{4}}$$

گام چهارم: برای محاسبه طول NH نیز به طول HM نیاز داریم:

$$NH = MN - HM = MN - MP \cos \hat{M} = 4 - 5 \cos 60^\circ = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

پس طبق گام قبلی طول PN به دست می‌آید:

$$PN = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{75}{4}} = \sqrt{\frac{84}{4}} = \sqrt{21}$$

گام پنجم: و در نهایت طبق رابطه به دست آمده در گام دوم داریم:

$$\sin \hat{P} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: از اتحادهای مثلثاتی $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x - \cos^2 x \sin^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x (1 - \sin^2 x)} = \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x (1 - \sin^2 x)}$$

گام دوم: با جای‌گذاری اتحادهای مثلثاتی $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ و $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ داریم:

$$\frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x \sin^2 x}{\cos^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = \tan^4 x = (\sqrt[3]{3})^4 = 3^2 = 9$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: انتهای کمان روبه‌رو به زاویه θ ، در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\tan \theta}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} + \frac{\cot \theta}{\sqrt{1+\cot^2 \theta}} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}}} + \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta}}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -\sin \theta + \cos \theta$$

گام دوم: با برابر قرار دادن عبارت به دست آمده در گام اول با مقدار داده شده در فرض سؤال داریم:

$$-\sin \theta + \cos \theta = -\frac{5}{4} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_{=1} - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{25}{16}$$

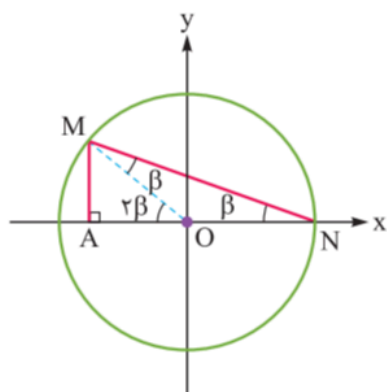
$$\Rightarrow -2 \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{16} \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = -\frac{9}{32}$$

گام سوم: با توجه به شکل $x = \cos \theta$ و $y = \sin \theta$ است، پس داریم:

$$xy = -\frac{9}{32} \Rightarrow \frac{1}{xy} = -\frac{32}{9} \Rightarrow \left[\frac{1}{xy} \right] = -4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: مطابق شکل، شعاع OM را رسم می‌کنیم:

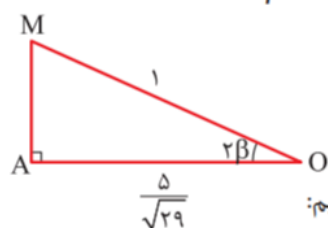


مثلث MON متساوی‌الساقین است (چرا؟)، پس دو زاویه M و N در این مثلث هر دو برابر β هستند. زاویه AOM برای مثلث

$$\widehat{AOM} = \widehat{M} + \widehat{N} = 2\beta$$

MON، یک زاویه خارجی محسوب می‌شود و برابر 2β است:

گام دوم: حال روی مثلث AOM متمرکز می‌شویم:



شعاع دایره مثلثاتی برابر ۱ است و با استفاده از قضیه فیثاغورس، طول AM را نیز حساب می‌کنیم:

$$AM^2 = OM^2 - OA^2 = 1 - \frac{25}{29} = \frac{4}{29} \Rightarrow AM = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\tan 2\beta + \cot 2\beta = \frac{\frac{2}{\sqrt{29}}}{\frac{5}{\sqrt{29}}} + \frac{\frac{5}{\sqrt{29}}}{\frac{2}{\sqrt{29}}} = \frac{2}{5} + \frac{5}{2} = \frac{4}{10} + \frac{25}{10} = \frac{29}{10} = 2\frac{9}{10}$$

گام سوم: عبارت خواسته شده را حساب می‌کنیم:

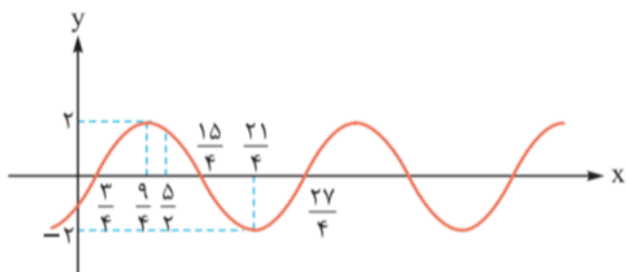
(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: ابتدا با استفاده از دوره تناوب، مقدار a را به دست می آوریم:

$$T = \frac{2\pi}{|a|\pi} = \frac{2}{|a|} = 6 \Rightarrow |a| = \frac{1}{3} \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{3}$$

گام دوم: باید نمودار تابع $f(x) = 2 \sin(\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{4})$ را از روی نمودار تابع $y = \sin x$ رسم کنیم. برای این کار، نمودار تابع

$y = \sin x$ را ابتدا $\frac{\pi}{4}$ واحد به راست می بریم و سپس طول نقاط آن را بر $\frac{\pi}{3}$ تقسیم و عرض نقاط را در ۲ ضرب می کنیم:



گام سوم: مطابق شکل بالا، بیشترین مقدار b که تابع روی بازه $(\frac{5}{4}, b)$ بتواند اکیداً یکنوا باشد، $\frac{21}{4}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

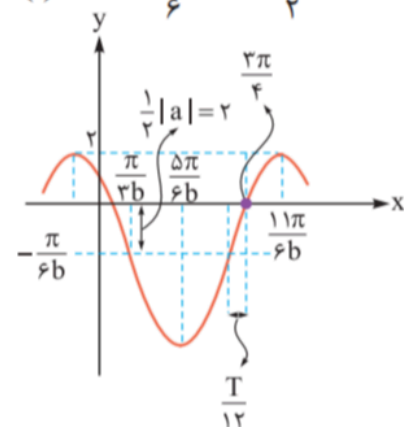
گام اول: در نمودارهای $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ مقدار c همواره میانگین $y_{\min}$ و $y_{\max}$ است؛ پس داریم:

$$c = \frac{2-6}{2} = -2$$

گام دوم: از $y_{\max}$ یا $y_{\min}$ به دلخواه استفاده می کنیم:

$$y_{\max} = c + |a| = -2 + |a| = 2 \Rightarrow |a| = 4$$

اما چون طبق نمودار $f(0) > 0$ است، قطعاً a مثبت است: $a = 4$ $\Rightarrow a > \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = 4$



گام سوم: پس تا این جا $f(x) = 4 \cos(bx + \frac{\pi}{6}) - 2$ است و قصد داریم نمودار

این تابع را از روی نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنیم. برای این کار، نمودار تابع

$y = \cos x$ را $\frac{\pi}{6}$ واحد به چپ می بریم، سپس طول نقاط را بر b تقسیم و عرض

نقاط آن را در ۴ ضرب می کنیم و در انتها ۲ واحد به پایین انتقال می دهیم:

مشخص است که $b > 0$ است؛ زیرا اگر $b < 0$ باشد، نقطه ماکزیم نمودار در سمت راست محور y ها قرار می گیرد.

گام چهارم: با توجه به شکل بالا، تابع از $x = \frac{4\pi}{3b}$ تا $x = \frac{3\pi}{4}$ (نقطه برخورد با محور x ها)، دوره تناوب را طی کرده است.

$$\frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{3b} = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} = \frac{9\pi}{6b} \Rightarrow b = 2$$

از آن جا که $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{b}$ است، داریم:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{4+2}{-2} = -3$$

گام پنجم: مطلوب مسئله را حساب می کنیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۲۲

گام اول: با توجه به رابطه $\tan 2\alpha$ می‌دانیم که $\tan 6x$ به صورت $\frac{2 \tan 3x}{1 - \tan^2 3x}$ نوشته می‌شود، با توجه به این موضوع تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\tan 3x}{1 - \tan^2 3x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \tan 3x}{1 - \tan^2 3x} \right) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \tan 6x$$

دقت کنید که:

$$\frac{2 \tan 3x}{1 - \tan^2 3x} = \frac{2 \frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{1 - \frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x}} = \frac{2 \frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\frac{\cos^2 3x - \sin^2 3x}{\cos^2 3x}} = \frac{2 \sin 3x \cos 3x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \frac{\sin 6x}{\cos 6x} = \tan 6x$$

گام دوم: اگر x در بازه $(\frac{2\pi}{3}, \alpha)$ باشد، $6x$ در بازه $(4\pi, 6\alpha)$ است.

$$\frac{2\pi}{3} < x < \alpha \xrightarrow{\times 6} 4\pi < 6x < 6\alpha$$

می‌دانیم که توابع به فرم $y = a \tan x$ در بازه‌های $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ یکنوا هستند؛ پس حداکثر α برابر می‌شود با:

$$6\alpha = 4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۲۳

گام اول: در تساوی داده‌شده $\tan x - \cot x$ را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\tan x - \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} \xrightarrow{\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x} \frac{-\cos 2x}{\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x} \Rightarrow \tan x - \cot x = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x}$$

گام دوم: حال عبارت به‌دست‌آمده را در تساوی صورت سؤال جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{\cos 2x}{\tan x - \cot x} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{\cos 2x}{\frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x}} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x}{-\cos 2x} = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \sin 2x = \frac{3}{8} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$$

گام سوم: می‌دانیم که $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ خواهیم داشت:

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \frac{-3}{4} = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow -3 - 2 \tan^2 x = 4 \tan x \Rightarrow 2 \tan^2 x + 4 \tan x + 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=28} \tan x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{2}$$

پس خواسته سؤال $3 \tan x + 4$ است، برابر می‌شود با:

$$3 \tan x + 4 = 3 \left(\frac{-4 \pm \sqrt{7}}{2} \right) + 4 = -6 \pm \frac{3\sqrt{7}}{2} + 4 = \pm \frac{3\sqrt{7}}{2} - 2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: با توجه به اتحادهای طلایی که در درس باکس گفتیم $\cos^2(bx + \frac{\pi}{6})$ را به صورت زیر می‌نویسیم تا از شتر توان ۲ خلاص شویم:

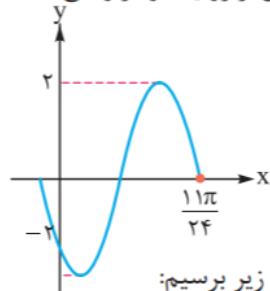
$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} \Rightarrow \cos^2(bx + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \cos(2(bx + \frac{\pi}{6})) + \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2(bx + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \cos(2bx + \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}$$

تابع f را طبق تساوی به دست آمده بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = c + a \cos^2(bx + \frac{\pi}{6}) \xrightarrow{\cos^2(bx + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \cos(2bx + \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}} f(x) = c + a(\frac{1}{2} \cos(2bx + \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos(2bx + \frac{\pi}{3}) + c$$

گام دوم: می‌دانیم در توابع به فرم $a \cos(bx) + c$ ، $\max = |a| + c$ و $\min = -|a| + c$ ، هم‌چنین از روی نمودار واضح است



که ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۲ و -۲ است؛ پس:

$$\max : \left| \frac{a}{2} \right| + \frac{a}{2} + c = 2$$

$$\min : -\left| \frac{a}{2} \right| + \frac{a}{2} + c = -2$$

دو طرف رابطه‌های به دست آمده را یک بار با هم جمع می‌کنیم و یک بار از هم کم می‌کنیم تا به روابط زیر برسیم:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{2} \right| + \frac{a}{2} + c &= 2 \\ -\left| \frac{a}{2} \right| + \frac{a}{2} + c &= -2 \end{aligned} \xrightarrow{\begin{matrix} (+) \\ (-) \end{matrix}} \begin{cases} a + 2c = 0 \\ 2\left| \frac{a}{2} \right| = 4 \Rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| = 2 \Rightarrow \frac{|a|}{2} = 2 \Rightarrow |a| = 4 \end{cases}$$

$$|a| = 4 \Rightarrow a = -4 \xrightarrow{c = -\frac{a}{2}} c = 2$$

$$c + ab = 2 + (-4)(-2) = 2 + 8 = 10$$

پس $a < 0$. در گام سوم دیدیم که $|a| = 4$ ، در نتیجه:

پس خواسته سؤال برابر می‌شود با:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: با توجه به رابطه $\sin 2nx = 2 \sin nx \cos nx$ ، معادله را ساده تر می کنیم:

$$\sin 2nx + \cos nx = 0 \Rightarrow 2 \sin nx \cos nx + \cos nx = 0$$

از $\cos nx$ فاکتور می گیریم:

$$\cos nx (2 \sin nx + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos nx = 0 \\ 2 \sin nx + 1 = 0 \Rightarrow \sin nx = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

گام دوم: جواب های کلی معادله را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} \cos nx = 0 \Rightarrow nx = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin nx = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin nx = \sin \frac{-\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} nx = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ nx = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

گام سوم: با توجه به این که می خواهیم جواب ها در بازه $(0, \pi)$ باشد، به ازای x مناسب چندتا از جواب ها را می نویسیم:

$$nx = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow nx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \Rightarrow x = \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \dots$$

$$\begin{cases} nx = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ nx = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow nx = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \dots \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6n}, \frac{11\pi}{6n}, \frac{19\pi}{6n}, \dots$$

حال جواب ها را به ترتیب مرتب می کنیم:

$$\frac{\pi}{2n}, \frac{7\pi}{6n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{11\pi}{6n}, \frac{5\pi}{2n}, \frac{19\pi}{6n}, \dots$$

گام چهارم: برای این که ۵ جواب داشته باشیم، باید π از $\frac{19\pi}{6n}$ کوچک تر و از $\frac{5\pi}{2n}$ بزرگ تر باشد؛ پس:

$$\frac{5\pi}{2n} < \pi < \frac{19\pi}{6n} \xrightarrow{\text{تقسیم بر } \pi} \frac{5}{2n} < 1 < \frac{19}{6n} \xrightarrow{\times n} \frac{5}{2} < n < \frac{19}{6}$$

$$\Rightarrow n = 3: \text{ مقدار طبیعی } n$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول (به دست آوردن مقدار a): با توجه به نمودار رسم شده، دوره تناوب (فاصله بین دو مجانب رسم شده) برابر است با:

$$T(2) = 4$$

$$T = \frac{\pi}{\left| \frac{a\pi}{2} \right|}$$

با توجه به این که تابع نزولی است، پس $a < 0$ است؛ بنابراین:

$$T = \frac{\pi}{\left| \frac{a\pi}{2} \right|} = \frac{2}{|a|} \xrightarrow{a < 0} T = \frac{2}{-a}$$

$$T = \frac{2}{-a} = 4 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

پس:

$$y = 1 + \tan\left(-\frac{\pi}{4}x\right) \quad \text{داریم: } a = -\frac{1}{2}$$

گام دوم (به دست آوردن مقدار b): با توجه به شکل، تابع $\tan$ در $x = b$ اولین برخورد را با محور x ها دارد، پس به ازای

$x = b$ تابع $\tan$ داده شده برابر صفر است:

$$y(b) = 1 + \tan\left(-\frac{\pi}{4}b\right) = 0 \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}b\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4}b = \frac{\pi}{4} \Rightarrow b = 1$$

گام سوم (به دست آوردن دوره تناوب $y = a - b \cos\left(\frac{\pi}{a-b}x\right)$): با جای گذاری مقادیر a و b داریم:

$$y = -\frac{1}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{-\frac{1}{2}-1}x\right) = -\frac{1}{2} - \cos\left(-\frac{2\pi}{3}x\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\left| -\frac{2\pi}{3} \right|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$$

که دوره تناوب آن برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول (ساده سازی عبارت): می دانیم $\alpha = 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$ است، پس داریم: $\cos^2(bx - \frac{\pi}{4}) = \frac{1 + \cos(2bx - \frac{\pi}{2})}{2}$

بنابراین:

$$f(x) = c + \frac{a}{2}(1 + \cos(2bx - \frac{\pi}{2})) = c + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos(2bx - \frac{\pi}{2})$$

$$\xrightarrow{\cos(\frac{\pi}{2} - 2bx) = \sin 2bx} f(x) = c + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sin(2bx)$$

گام دوم (به دست آوردن مقادیر a و c): با توجه به نمودار، مقدار ماکزیمم برابر ۱ است و $f(0) = 0$. از طرفی نمودار رسم شده در صورت سوال شبیه نمودار $\sin x$ است؛ پس باید $ab > 0$ باشد. با توجه به فرض سؤال $b > 0$ است پس a نیز مثبت است.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 0 \Rightarrow c + \frac{a}{2} + 0 = 0 \Rightarrow a = -2c \quad (*) \\ y_{\max} = 1 \Rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| + c + \frac{a}{2} = 1 \xrightarrow{a > 0} \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + c = 1 \Rightarrow a + c = 1 \end{array} \right.$$

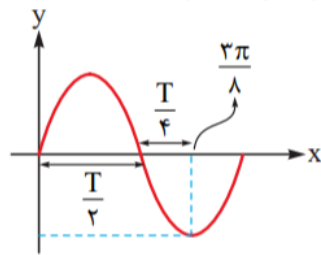
پس طبق $(*)$ ، $a = -2c = 2$ است.

$$\xrightarrow{(*) \ a = -2c} -2c + c = 1 \Rightarrow c = -1$$

گام سوم (به دست آوردن مقدار b): با توجه به شکل $\frac{T}{4} + \frac{T}{4}$ برابر $\frac{3\pi}{4}$ است؛ پس:

که این مقدار برابر است با $T = \frac{2\pi}{|2b|}$ ؛ بنابراین:

گام چهارم (به دست آوردن خواسته سؤال (حاصل $c + ab$)): $c + ab = -1 + 2(2) = 3$



$$\frac{3}{4}T = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{b > 0} b = 2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: جواب معادله $\sin u = 0$ به صورت $u = k\pi$ است، پس:

$$\sin(\underbrace{3\pi \cos x}_u) = 0 \Rightarrow 3\pi \cos x = k\pi \Rightarrow \cos x = \frac{k}{3}$$

گام دوم: چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس: $-1 \leq \frac{k}{3} \leq 1 \xrightarrow{\times 3} -3 \leq k \leq 3 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$

گام سوم: در ۷ حالت، مجموع جوابهای معادله در بازه $[0, 2\pi]$ را حساب می‌کنیم:

$$k = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{\text{مجموع}} 2\pi$$

$$k = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{با توجه به نکته}} \text{مجموع} = 2\pi$$

$$k = -1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{با توجه به نکته}} \text{مجموع} = 2\pi$$

$$k = 2 \Rightarrow \cos x = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{با توجه به نکته}} \text{مجموع} = 2\pi$$

$$k = -2 \Rightarrow \cos x = -\frac{2}{3} \xrightarrow{\text{با توجه به نکته}} \text{مجموع} = 2\pi$$

$$k = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi \Rightarrow \text{مجموع} = 2\pi$$

$$k = -3 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$$

پس مجموع کل جوابها برابر 14π است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: از اتحاد $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos \theta (2\cos^2 \theta - 1) = 2\cos^3 \theta - \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 8\cos^3 \theta - 4\cos \theta - 1 = 0$$

گام دوم: معادله بالا را با تغییر متغیر $t = \cos \theta$ حل می‌کنیم:

$$8t^3 - 4t - 1 = 0$$

با توجه به ضرایب معادله، جواب‌های $\pm \frac{1}{4}$ را امتحان می‌کنیم، می‌بینیم که $t = -\frac{1}{4}$ یک جواب معادله است:

$$8\left(-\frac{1}{4}\right)^3 - 4\left(-\frac{1}{4}\right) - 1 = 0$$

پس چندجمله‌ای $8t^3 - 4t - 1$ یک عامل $2t + 1$ را دارد:

$$\Rightarrow 8t^3 - 4t - 1 = (2t + 1)(4t^2 - 2t - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 4t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 16}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

گام سوم: θ زاویه‌ای حاده است، پس $\cos \theta$ که همان متغیر t باشد، مقداری مثبت دارد:

$$\Rightarrow t = \cos \theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

و از اتحاد $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: باید معادلاتی بنویسیم تا پارامترهای a و b را بتوانیم حساب کنیم. ابتدا از عرض از مبدأ تابع شروع می‌کنیم:

پاسخ تشریحی

$$f(0) = a + b \cos \frac{\pi}{3} = a + \frac{b}{2} \Rightarrow A(0, a + \frac{b}{2})$$

مختصات نقطه B هم به صورت $B(2\pi + \frac{\pi}{3}, 1)$ است.

حال شیب خط d را حساب کرده و برابر $-\frac{3}{14\pi}$ قرار می‌دهیم:

$$m_d = \frac{1 - a - \frac{b}{2}}{\frac{7\pi}{3}} = -\frac{3}{14\pi} \Rightarrow 2a + b = 3 \quad (1)$$

برای رسم نمودار تابع f از روی نمودار تابع $y = \cos x$ ، مشخص است که نمودار نسبت به محور x ها قرینه شده است؛ پس $b < 0$ است.

$$\Rightarrow f_{\min} = a + b = 1 \quad (2)$$

در نتیجه کمترین مقدار تابع به ازای $\cos x = 1$ به دست می‌آید.

$$a = 2, b = -1$$

$$\Rightarrow a - b = 3$$

از دستگاه معادلات (۱) و (۲) به دست می‌آید:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۳۱

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا اندازه کمان BNC را به دست می آوریم. اگر اندازه کمان BNC برابر α باشد، آن گاه داریم:

$$\widehat{BNC} + \widehat{AMB} + \widehat{CPA} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + (\alpha - 40^\circ) + 2\alpha = 360^\circ \Rightarrow 4\alpha = 400^\circ \Rightarrow \alpha = 100^\circ$$

گام دوم: اندازه زاویه α را برحسب رادیان می نویسیم:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{100^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{9}$$

گام سوم: به کمک شعاع دایره و اندازه زاویه برحسب رادیان، طول کمان BNC را پیدا می کنیم.

$$\alpha = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{5\pi}{9} = \frac{L}{9} \Rightarrow \text{طول کمان} = L = 5\pi$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۳۲

پاسخ تشریحی

گام اول: مقادیر نسبت های مثلثاتی $\cos(\pi + \alpha)$ و $\cot(\frac{3\pi}{4} - \alpha)$ را پیدا می کنیم.

$$\underbrace{\cos(\pi + \alpha)}_{\text{ربع سوم}} = -\cos \alpha$$

$$\underbrace{\cot(\frac{3\pi}{4} - \alpha)}_{\text{ربع سوم}} = \tan \alpha$$

گام دوم: مقادیر به دست آمده را در تابع f جایگزین کرده و مقدار تابع را به ازای $x = 3$ ، برابر صفر قرار می دهیم.

$$f(x) = \frac{x \cos(\pi + \alpha) + \cot \alpha}{\cot(\frac{3\pi}{4} - \alpha) - x} = \frac{-x \cos \alpha + \cot \alpha}{\tan \alpha - x}$$

$$f(3) = 0 \Rightarrow -3 \cos \alpha + \cot \alpha = 0 \Rightarrow \cot \alpha = 3 \cos \alpha \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 3 \cos \alpha \xrightarrow{\cos \alpha \neq 0} \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

گام سوم: مقدار تابع را در نقطه $x = 0$ پیدا می کنیم.

$$f(0) = \frac{\cot \alpha}{\tan \alpha} = \frac{\cot \alpha}{\frac{1}{\cot \alpha}} = \cot^2 \alpha$$

گام چهارم: با استفاده از اتحاد های مثلثاتی $\cot^2 \alpha$ را محاسبه می کنیم.

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 = 9 - 1 = 8$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۳۳

$$\cos(2(\frac{\pi}{4} - \alpha)) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2 \cos^2(\frac{\pi}{4} - \alpha) - 1 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{\pm \sqrt{56}}{9} \Rightarrow \cot 2\alpha = \pm \frac{\sqrt{56}}{5}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$f(x) = \sin ax \cos ax (\cos^2 ax - \sin^2 ax) = \underbrace{\sin ax \cos ax}_{\frac{1}{2} \sin 2ax} \underbrace{(\cos^2 ax - \sin^2 ax)}_{\cos 2ax} \underbrace{(\cos^2 ax + \sin^2 ax)}_1$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2ax \cos 2ax \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \sin 4ax$$

۱۳۴

نصف دوره تناوب روی نمودار برابر $\frac{\pi}{16} - \left(-\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\pi}{8}$ می باشد، پس $T = \frac{\pi}{4}$ است و داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|4a|} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow |a| = 2 \xrightarrow[\text{شروع نزولی تابع از مبدا}]{a < 0} a = -2$$

از طرفی b همان مقدار $\min$ تابع است:

$$\Rightarrow b = \frac{1}{4}(-1) = -\frac{1}{4} \Rightarrow a - b = -\frac{7}{4}$$

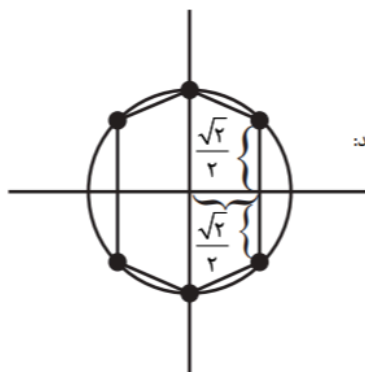
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

۱۳۵

$$2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) + 1 - \cos 2x = 2 \Rightarrow \cos 2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x(\cos 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$



این جوابها روی دایره مثلثاتی شکل زیر، مشخص شده‌اند:

$$S = 2\left(\frac{(2+\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

شش ضلعی شکل بالا از دو دوزنقه هم‌نهشت با قاعده‌های ۲ و sqrt(2) و ارتفاع sqrt(2)/2 تشکیل شده است. پس داریم:

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$f(x) = a + 2b \sin \frac{cx}{2} \cos \frac{cx}{2} = a + b \sin cx$$

$$\begin{cases} \min = -3 \Rightarrow a - |b| = -3 \\ f(0) = -1 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \Rightarrow |b| = 2$$

۱۳۶

چون نمودار تابع بعد از $x = 0$ نزولی است (نمودار شبیه $-\sin$ است) پس $bc < 0$ ، فرض کنیم $b = -2$ پس $c > 0$.

$$f(x) = -1 - 2 \sin cx = 0 \Rightarrow \sin cx = -\frac{1}{2}$$

نقطه‌ای با طول $\frac{19\pi}{18}$ سومین صفر این تابع در $x > 0$ می‌باشد:تابع $\sin cx$ به ترتیب در $\frac{7\pi}{6}$ ، $\frac{11\pi}{6}$ ، $2\pi + \frac{7\pi}{6}$ و ... برابر $-\frac{1}{2}$ است.

$$\sin\left(c \times \frac{19\pi}{18}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{7\pi}{6}\right) \Rightarrow \frac{19\pi}{18}c = \frac{19\pi}{6} \Rightarrow$$

پس:

$$c = 3 \rightarrow f(x) = -1 - 2 \sin 3x \Rightarrow f\left(\frac{4\pi}{9}\right) = -1 - 2 \sin \frac{4\pi}{3}$$

$$= -1 - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi bx\right) + c \Rightarrow f(x) = a \cos \pi bx + c$$

۱۳۷

$$\begin{cases} \text{Max} = 6 \Rightarrow |a| + c = 6 \\ \text{Min} = -2 \Rightarrow -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2, |a| = 4$$

چون نمودار تابع شبیه $-\cos x$ است پس: $a = -4$

$$T = 33 - 15 = 18 \Rightarrow \frac{2\pi}{|\pi b|} = 18 \Rightarrow |b| = \frac{1}{9}$$

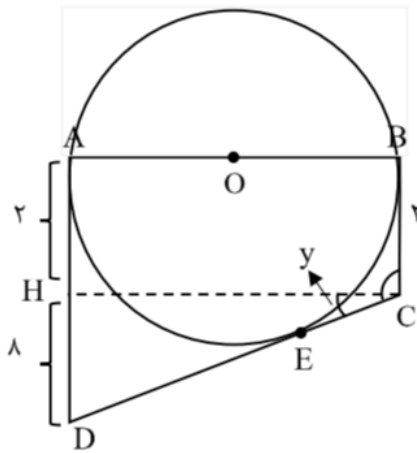
$$\Rightarrow f(x) = -4 \cos \frac{\pi x}{9} + 2 \rightarrow f(6) = -4 \cos \frac{2\pi}{3} + 2 = -4\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 4$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۳۸ از عبارت $x + 2y = \frac{\pi}{2}$ می‌توان فهمید $x = \frac{\pi}{2} - 2y$ بنابراین:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - 2y + y)}{\cos y} - \frac{\tan(\frac{\pi}{2} - 2y - y)}{\cot 2y} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - y)}{\cos y} - \frac{\tan(\frac{\pi}{2} - 2y)}{\cot 2y} = 1 - 1 = 0$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



می‌دانیم از نقطه‌ای خارج دایره، دو مماس با طول مساوی می‌توان بر آن رسم کرد؛ پس:

$$DE = AD = 10, \quad CE = BC = 2$$

از C بر ضلع AD عمود می‌کنیم:

$$CH = \sqrt{12^2 - 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

از طرفی:

$$\sin y = \frac{8}{12} = \frac{2}{3},$$

$$x = 90^\circ + y \Rightarrow \cos x = \cos(90^\circ + y) = -\sin y$$

پس:

$$\Rightarrow A = 1 - \cos x = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$12 = \frac{2\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{6} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{\pi}{6}$$

۱۳۹ دوره تناوب تابع برابر ۱۲ است، پس:

در نقطه برخورد نمودار با محور y ها، تابع صعودی است. پس: $a > 0$

در نقطه $x = 5$ برای اولین بار نمودار تابع محور x ها را قطع کرده است. پس:

$$\Delta a + \frac{\pi}{n} = \pi \Rightarrow \frac{\Delta \pi}{6} + \frac{\pi}{n} = \pi \Rightarrow n = 6$$

$$\Rightarrow an = \pi$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3(\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

$$(\sin x - \cos x)^6 = ((\sin x - \cos x)^2)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x)^3$$

$$= (1 - \sin 2x)^3 = 1 + \sin^3 2x - 3\sin 2x$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x + 1 + \sin^3 2x - 3\sin 2x = \frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \sin^3 2x - 3\sin 2x - \frac{17}{16} = 0 \xrightarrow{\times 16} 4\sin^3 2x - 48\sin 2x - 17 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = \frac{16+18}{4} = \frac{34}{4} \\ \sin 2x = \frac{16-18}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} : x > 0 \text{ اولین جواب در}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴۲

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-1}{1 + \sin x} = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{a}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \left[(-2)^-\right] + b = b - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}ab = \frac{-\Delta}{4} \end{cases} \quad (x > \frac{\pi}{2} \Rightarrow x^2 > \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow 2x^2 > \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{2x^2} < \frac{2}{\pi^2} \Rightarrow -\frac{\pi^2}{2x^2} > -2)$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴۳

$$f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

در ابتدا

چون مقدار قدر مطلق مینیمم از قدر مطلق ماکزیمم بزرگتر است، حتماً ضرب $\sin^2 bx$ باید منفی باشد؛ یعنی: $a < 0$

$$-|a| + c = -\frac{3}{2} \Rightarrow a + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -2$$

از صفر تا $x = \frac{3}{4}\pi$ ، یک و نیم دوره تناوب تابع رسم شده است:

$$\frac{3}{2}T = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 2$$

در نهایت، ضابطه تابع به صورت $f(x) = -2\sin^2 2x + \frac{1}{2}$ خواهد شد:

$$f\left(\frac{\Delta\pi}{6}\right) = -2\sin^2 \frac{\Delta\pi}{3} + \frac{1}{2} = -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = -1$$

نکته: دوره تناوب توابع $y = \sin^2 bx$ ، $y = \cos^2 bx$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ می باشد:

$$\sin^2 bx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2bx) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{|b|}$$

$$\cos^2 bx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2bx) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{|b|}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴۴

باید ریشه های معادله $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ را به دست آوریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} + x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{12} \\ \frac{\pi}{4} + x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} + x \rightarrow \text{غیرممکن} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k=0 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} = x_1 \\ k=-1 \rightarrow x = -\pi + \frac{\pi}{12} = x_2 \\ k=1 \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{12} = x_3 \\ k=2 \rightarrow x = 2\pi + \frac{\pi}{12} = x_4 \end{cases} \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\pi + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} + \pi + \frac{\pi}{12} + 2\pi + \frac{\pi}{12} = \frac{27\pi}{12} = \frac{9\pi}{4}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

در نقطه $x = a$ باید مخرج صفر شود و علامت آن عوض نشود ۱۴۵

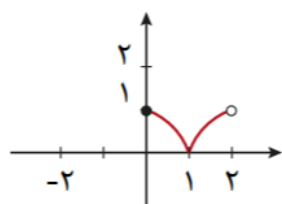
$$\cos^2 x - \cos x = \cos x (\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} & \text{ساده} \\ x = 2\pi & \text{مضاعف} \Rightarrow a = 2\pi \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\frac{b}{\pi}x + 2}{\cos x (\cos x - 1)} = \frac{2b + 2}{1 \times 0^-} = +\infty$$

$$\Rightarrow 2b + 2 < 0 \Rightarrow b < -1 \Rightarrow [b] \leq -2$$

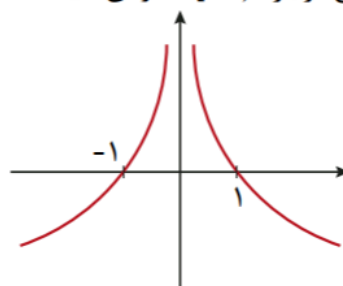
(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



$$0 \leq x < 1 \rightarrow y = \cos \frac{\pi x}{2}$$

$$1 \leq x < 2 \rightarrow y = -\cos \frac{\pi x}{2}$$

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x^2 = 2 \log_{\frac{1}{2}} |x| \xrightarrow{\text{رسم}}$$



تابع در بازه $(-\infty, 0)$ صعودی اکید و در $(0, +\infty)$ نزولی اکید است.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$f_{\max} = 4 \Rightarrow a + 2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2 - 2 \cos(\pi b x + \pi c)$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow 2 - 2 \cos(\pi c) = 1 \Rightarrow \cos(\pi c) = \frac{1}{2} \Rightarrow \pi c = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$c = 2k \pm \frac{1}{3} \xrightarrow{0 < c < 1, k \in \mathbb{Z}} c = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 - 2 \cos\left(\pi b x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2 - 2 \cos\left(\frac{5\pi b}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{5\pi b}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi b}{3} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi \Rightarrow b = \frac{6k-1}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{T}{2} < \frac{\Delta}{3} < T \Rightarrow \frac{2\pi}{2|\pi b|} < \frac{\Delta}{3} < \frac{2\pi}{|\pi b|}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{\Delta}{3}|b| < 2 \Rightarrow \frac{3}{5} < |b| < \frac{6}{5}$$

$$\frac{3}{5} < \left| \frac{6k-1}{5} \right| < \frac{6}{5} \Rightarrow 3 < |6k-1| < 6$$

$$\begin{cases} 3 < 6k-1 < 6 \\ -6 < 6k-1 < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{6} < k < \frac{7}{6} \rightarrow k=1 \Rightarrow b=1 \\ -\frac{5}{6} < k < -\frac{1}{6} \rightarrow k \in \emptyset \end{cases}$$

$$a + b + c = 2 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\lambda}{\Delta} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\lambda}{\Delta}$$

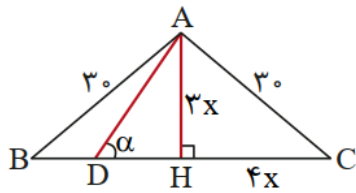
$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\Delta}{\lambda}$$

$$\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$= \sqrt{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} (1 - \sin \alpha \cos \alpha) \quad \text{۱۴۸}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{\Delta}{4} \left(1 - \frac{\Delta}{\lambda}\right)} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{\lambda} = \frac{9}{16}$$



$$\tan \hat{C} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} AH = 3x \\ HC = 4x \end{cases}$$

$$9x^2 + 16x^2 = 900 \Rightarrow x^2 = 36 \xrightarrow{x>0} x = 6$$

$$\tan \alpha = \frac{AH}{DH} \Rightarrow DH = \frac{1}{3} AH = 6 \Rightarrow BD = BH - DH = 24 - 6 = 18$$

نکته: در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده میانه نیز است بنابراین: $BH = HC = 24$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$9\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha + 12\sin \alpha \cos \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow 5\sin^2 \alpha + 4 + 12\sin \alpha \cos \alpha = 1$$

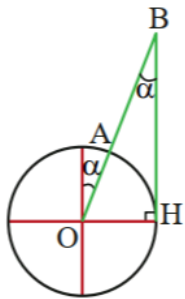
$$\Rightarrow 5\sin^2 \alpha + 3 = -12\sin \alpha \cos \alpha$$

از طرفی:

$$\Lambda \tan \alpha + 3 \cot \alpha = \frac{\Lambda \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{3 \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\Lambda \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \xrightarrow{\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{5\sin^2 \alpha + 3}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{-12\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = -12$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\begin{cases} \text{OB مورب} \\ \text{OA} \parallel \text{BH} \Rightarrow \widehat{OBH} = \alpha \end{cases}$$

$$\sin \alpha = \frac{OH}{OB} = \frac{1}{1+AB} = \frac{1}{2/5} = 5/4$$

چون $\tan x \cdot \cot x = 1$ است، پس:

$$\tan(x + \frac{\pi}{3}) = \cot x$$

پس مجموع دو زاویه x و $x + \frac{\pi}{3}$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

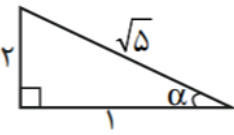
$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos^2 2x = \cos^2 \frac{\pi}{6} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$$

نکته: اگر زوایای α و β متمم یکدیگر باشند، آنگاه $\cot \beta = \tan \alpha$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۵۳

$$A = \frac{\sin 2\alpha + 2\cos\alpha}{\cos 2\alpha - \sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos\alpha}{1 - 2\sin^2\alpha - \sin\alpha} \Rightarrow A = \frac{2\cos\alpha(1 + \sin\alpha)}{(\sin\alpha + 1)(-2\sin\alpha + 1)} \Rightarrow A = \frac{2\cos\alpha}{1 - 2\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$


α ناحیه سوم است.

$$A = \frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{-2}{\sqrt{5} + 2}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۵۴

با توجه به فرمول $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ داریم:

$$f(x) = \frac{1}{4}\sin(2\pi x)\cos(2\pi x) = \frac{1}{8}\sin(4\pi x)$$

$$T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

دوره تناوب تابع $kf(\frac{x}{k})$ ، k برابر دوره تناوب $f(x)$ است، پس دوره تناوب خواسته شده برابر $k^2 = \frac{1}{4}$ است.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۵۵

$$\tan x - 3\tan x = 1 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$$

$$P = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \xrightarrow[\cos x \text{ تقسیم می کنیم}]{\text{تمام جملات را بر}} \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{-\frac{1}{2} + 1} = -3$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۵۶

زوایای $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ متمم یکدیگرند، در زاویه متمم α و β داریم: $\cos\beta = \sin\alpha$

$$A = \cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}$$

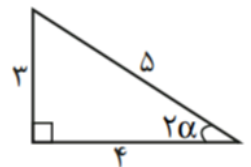
$$\Rightarrow AB = \sin^2\frac{\pi}{12} - \cos^2\frac{\pi}{12} \xrightarrow{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha} -\cos\frac{2\pi}{12} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۵۷

چون $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$ است، پس $\cos 2\alpha = \frac{4}{5}$ است.

$$\begin{aligned} \tan\alpha - \cot\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \\ &= \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}} = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$



(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۵۸

علامت b در ضابطه f تأثیری ندارد، پس فرض می کنیم b مثبت است.

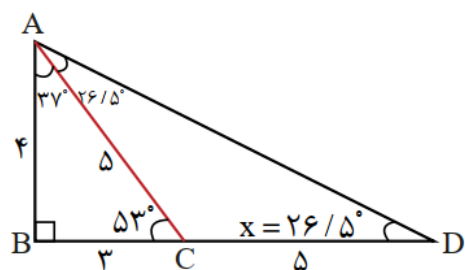
$$\begin{cases} \max = 6 \Rightarrow a + b = 6 \\ \min = -2 \Rightarrow a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 - 4\sin(2x)$$

$$f = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

چون $0 < 2x < 4\pi$ است پس نمودار f در بازه $(0, 2\pi)$ ، چهار بار محور x ها را قطع می کند.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\text{Max} = 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$y = A + B \sin Cx \Rightarrow \begin{cases} \text{Max} = A + |B| \\ \text{Min} = A - |B| \end{cases}$$

$$a - 6 = -3 \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = 3 - 6 \sin\left(b + \frac{\pi}{3}x\right)$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow 3 - 6 \sin b = 0 \Rightarrow \sin b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{6} \Rightarrow f(x) = 3 - 6 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}x\right)$$

$$f(10) = 3 - 6 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{3}\right)$$

$$f(10) = 3 - 6 \sin\left(\frac{21\pi}{6}\right) = 3 - 6 \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$f(10) = 3 - 6(-1) = 9 \Rightarrow f(10) = 9$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\text{Min} = 2a - 2 = b \Rightarrow 2a - b = 2$$

$$\frac{T}{2} = \left| \frac{-a}{2} \right| \Rightarrow T = |a| \Rightarrow T = a \Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}} = a \Rightarrow 2b = a \Rightarrow 6b - b = 2$$

$$b = \frac{2}{5}, a = \frac{4}{5} \Rightarrow 2a + b = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = 2$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$g(x) = 3 + 2a \sin x \Rightarrow \text{Max} = 3 + |2a|$$

$$2a - 3 = \frac{1}{2}(3 + |2a|) \Rightarrow 4a - 6 = 3 + 2|a|$$

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow 4a - 6 = 3 + 2a \Rightarrow a = \frac{9}{2} \\ a < 0 \Rightarrow 4a - 6 = 3 - 2a \Rightarrow 6a = 9 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{غقی زیرا } a < 0 \text{ و مقدار } \frac{3}{2} \text{ بدست آمده است.} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow a = 4/5$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

در مثلث ABC طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم: $AC = 5$.از طرفی چون $\sin 37^\circ = \frac{3}{5}$ است، پس $\widehat{BAC} = 37^\circ$ و $\widehat{BCA} = 53^\circ$ می‌شود. چون این 53° زاویه خارجی مثلث متساوی الساقین ACD است، پس $\widehat{C} = \frac{53^\circ}{2} = 26/5^\circ$ است.

۱۵۹

$$f(x) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} x \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} = 4 \times \frac{1}{4} = 2$$

۱۶۰

نکته:

با توجه به Min مقدار تابع داریم:

۱۶۱

با توجه به نمودار تابع $b > 0$ و a پس:

۱۶۲

$$f(x) = 2a - 3 \cos \frac{\pi}{4} x \Rightarrow \text{Min} = 2a - 3$$

۱۶۳

نکته: $2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$ ۱۶۴

$$f(x) = a - 2 \times (1 + \cos(\frac{\pi}{4} + 2bx))$$

$$f(x) = a - 2 + 2\sin 2bx$$

$$\text{Min} = a - 2 - 2 = a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$f(x) = 2 + 2\sin 2bx \Rightarrow 2 + 2\sin 2b \frac{\pi}{3} = 0$$

با توجه به نمودار $b < 0$ و از طرفی $f(\frac{\pi}{3}) = 0$ ، پس:

$$\Rightarrow \sin 2b \frac{\pi}{3} = -1 \Rightarrow 2b \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow b = -\frac{3}{4} \Rightarrow ab = 4(-\frac{3}{4}) = -3$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۶۵ می‌دانیم تابع $y = \tan x$ در بازه‌هایی به صورت $(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4})$ اکیداً صعودی است، پس:

$$\frac{a}{4} < x < \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{\pi a}{6} < \frac{\pi}{3} x < \frac{\pi}{3} \times \frac{5}{4}$$

برای $k=3$ ، تابع $y = \tan x$ در بازه‌ی $(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ اکیداً صعودی است.

$$\frac{\pi a}{6} < \frac{\pi}{3} x < \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \frac{a\pi}{6} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow a = 15$$

$a = 15$ حداقل مقدار a است.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$f(0) = -2 \Rightarrow a \tan(-\frac{\pi}{4}) = -2 \Rightarrow a(-1) = -2 \Rightarrow a = 2$$

$$\tan(bx - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow bx - \frac{\pi}{4} = 0, \pi$$

دومین ریشه قابل قبول است

$$\frac{5}{4}b = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow b = \frac{\pi}{4}$$

پس $ba = \pi$.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۶۷ می‌دانیم: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و طبق فرض مسأله $a = \frac{1}{\cos x} + \tan x$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 1 \rightarrow (\frac{1}{\cos x} - \tan x) \underbrace{(\frac{1}{\cos x} + \tan x)}_a = 1$$

حال با حل دستگاه مقابل مقدار $\cos x$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{\cos x} + \tan x = a \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\cos x} = \frac{1}{a} + a = \frac{1+a^2}{a}$$

$$\cos x = \frac{2a}{1+a^2} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{1+a^2}{2a}$$

و بنابراین:

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1) \\&= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \\&\Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{13}{16} \Rightarrow \\ \sin^2 2x &= \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow \\ x &= \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

k	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴
x	$-\pi + \frac{\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$	$\pm \frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$	$\pi \pm \frac{\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$	$2\pi - \frac{\pi}{12}$

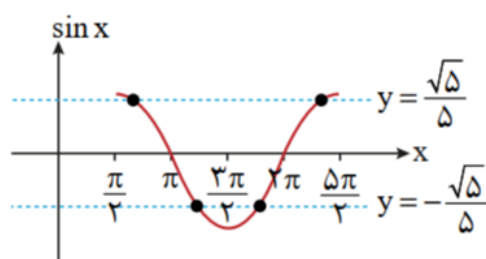
مجموع جواب‌های بالا برابر 6π می‌باشد.

نکته: اگر $\sin^2 x = \sin^2 \alpha$ و $\cos^2 x = \cos^2 \alpha$ ، آن‌گاه: $x = k\pi \pm \alpha$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\begin{aligned}\Delta \sin^3 x + 1 \cdot \sin^3 x - \sin x - 2 &= 0 \Rightarrow \Delta \sin^3 x (\sin x + 2) - (\sin x + 2) = 0 \Rightarrow \\ (\sin x + 2)(\Delta \sin^3 x - 1) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -2 \text{ غیق} \\ \sin^3 x = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta} \end{cases}\end{aligned}$$

برای تعیین ریشه‌ها با توجه به شکل زیر داریم:



اگر زاویه α دارای مقدار سینوس برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta}$ باشد: در ربع دوم زاویه $\pi - \alpha$ و در فاصله $(2\pi, \frac{5\pi}{4})$ زاویه $2\pi + \alpha$ جواب معادله خواهند بود.

خط $y = -\frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta}$ هم در نقاط $\pi + \alpha$ و $2\pi - \alpha$ نمودار $y = \sin x$ را قطع می‌کنند.

$$\pi - \alpha + 2\pi + \alpha + 2\pi - \alpha + \pi + \alpha = 6\pi$$

پس مجموع جواب‌ها:

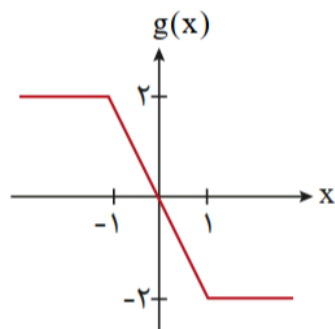
(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x \\ \Rightarrow \frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1}{b} &= \frac{1}{a+b} \\ \sin^4 x \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - \frac{2}{b} \sin^2 x + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} &= 0 \\ \left(\frac{a+b}{ab}\right) \sin^4 x - \frac{2}{b} \sin^2 x + \frac{a+b-b}{b(a+b)} &= 0 \\ \left(\frac{a+b}{a}\right) \sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{a}{a+b} &= 0 \rightarrow \sin^2 x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} \\ \Rightarrow \sin^2 x &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - \frac{4a}{a+b}}}{2 \frac{a+b}{a}} = \frac{a}{a+b}\end{aligned}$$

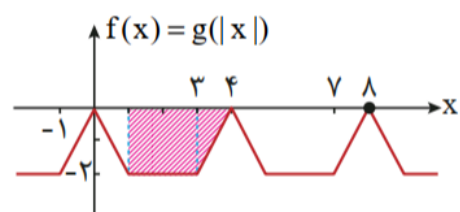
$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{b}{a+b} \\ \tan^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{a}{b}\end{aligned}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

ابتدا تابع $g(x) = |x-1| - |x+1|$ را رسم می‌کنیم.



$$f(x) = ||x|-1| - (|x|+1) = ||x|-1| - ||x|+1|$$



پس نمودار $f(x) = g(|x|)$ با $T=4$ را رسم می‌کنیم:

مساحت بین خطوط $x=9$ تا $x=12$ برابر است با مساحت بین خطوط $x=1$ تا $x=4$ ، چون:

$$f(9) = f(2 \times 4 + 1) = f(1)$$

$$f(12) = f(2 \times 4 + 4) = f(4)$$

$$S = 2 \times 2 + \frac{1 \times 2}{2} = 5$$

پس:

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$4 \cos ax = 1 + 2 \sin^2 x + \cos 2x, \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \Rightarrow$$

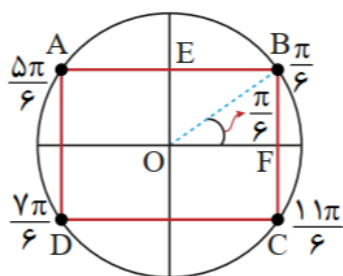
$$4 \cos ax = 1 + 2 \sin^2 x + 1 - 2 \sin^2 x = 2 \Rightarrow \cos ax = \frac{1}{2} \rightarrow$$

این معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۴ ریشه است، پس $a=2$:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}, 4\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

با توجه به شکل زیر چهارضلعی ABCD مستطیل است:



$$EB = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 2EB = \sqrt{3}$$

$$BF = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow BC = 2BF = 1$$

$$S = \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\cot x - \tan x = 2 \cot 2x \Rightarrow$$

$$2 \cot 2x = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{1}{2} \sin 2x} \Rightarrow \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2a\sqrt{3}}{\sin 2x} \xrightarrow{\sin 2x \neq 0, 2x \neq k\pi}$$

$$\cos 2x = a\sqrt{3}, \quad \frac{5\pi}{12} < x < \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{\times 2} \frac{5\pi}{6} < 2x < \frac{3\pi}{2}$$

بازه فوق در ناحیه دوم و سوم دایره مثلثاتی واقع است.

پس باید یک جواب در ناحیه دوم و جواب دوم را در ناحیه سوم قرار داد.

$$\pi - \frac{\pi}{6} < 2x < \pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow -1 \leq \cos 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$-1 \leq a\sqrt{3} < -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq a < -\frac{1}{2}$$

(دباز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: از روی $\tan 2\alpha$ با کمک رابطه $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ مقدار $\tan \alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan 2\alpha = 4 \cot \alpha = \frac{4}{\tan \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{\tan \alpha} \xrightarrow{\tan \alpha = t} \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{4}{t}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2t^2 = 4 - 4t^2 \Rightarrow 6t^2 = 4 \Rightarrow t^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{2}{3}$$

گام دوم: از روی $\tan^2 \alpha$ به کمک رابطه $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ مقدار $\cos^2 \alpha$ را حساب می‌کنیم:

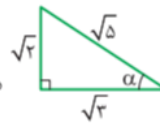
$$1 + \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{5}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{5}$$

گام سوم: با کمک فرمول $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ، در دو مرحله از روی $\cos^2 \alpha$ به $\cos 4\alpha$ می‌رسیم:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right) - 1 = \frac{1}{5}$$

$$\cos 4\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 2\left(\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{3}{5} \xrightarrow{\times 4} -\frac{12}{5}$$

هم می‌توانستیم به $\cos^2 \alpha = \frac{3}{5}$ برسیم.



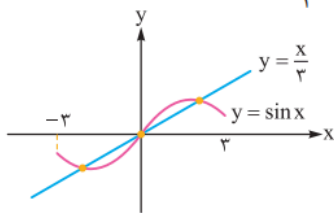
اشاره: وقتی به $\tan^2 \alpha = \frac{2}{3}$ رسیدیم از روی مثلث

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: اگر $|x| > 3$ باشد، آن‌گاه $\left|\frac{x}{3}\right| > 1$ و طرف راست معادله از ۲ بیشتر یا از ۲- کمتر است و تساوی برقرار نمی‌شود.

گام دوم: برای $|x| \leq 3$ چون تابع $f(t) = t + [t]$ اکیداً صعودی است، تساوی صورت سؤال فقط وقتی امکان دارد که $\sin x = \frac{x}{3}$ باشد.

گام سوم: شکل را ببینید:

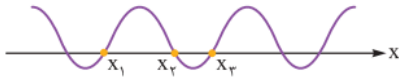


پس ۳ نقطه برخورد دارند؛ یعنی معادله ۳ جواب دارد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: به شکل نمودار کسینوسی دقت کنید:

۱۷۶



اگر نمودار نسبت به محور X این طور رسم شده باشد، دوره تناوب، فاصله برخورد نقاط اول و سوم است؛ یعنی $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{14\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 4\pi$ و این می گوید: $b = \pm \frac{1}{3}$

گام دوم: در این حالت $y = 1 + a \cos(\frac{X}{3})$ می شود. حالا باید مقدار تابع در $x = \frac{2\pi}{3}$ برابر صفر باشد:

$$1 + a \cos(\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow 1 + a \times \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = -2$$

پس ضابطه تابع $y = 1 - 2 \cos(\frac{X}{3})$ می شود.

$$1 - 2 \cos(\frac{X}{3}) = 0 \Rightarrow \cos(\frac{X}{3}) = \frac{1}{2}$$

گام سوم: می خواهیم تابع محور X ها را قطع کند، پس:

$$\cos(\frac{X}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}, \dots$$

جواب های $\cos(\frac{X}{3}) = \frac{1}{2}$ به صورت مقابل اند:

پس $k = \frac{10\pi}{3}$ می شود.

گام چهارم: بنابراین $\frac{ak}{\pi} = \frac{-2 \times \frac{10\pi}{3}}{\pi} = -\frac{20}{3}$ می شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: طرفین تساوی $3 \sin \theta + 4 \cos \theta = 2$ را به توان ۲ برسانیم:

۱۷۷

$$(3 \sin \theta + 4 \cos \theta)^2 = 2^2 \Rightarrow 9 \sin^2 \theta + 16 \cos^2 \theta + 24 \sin \theta \cos \theta = 4$$

گام دوم: می دانیم $9 \sin^2 \theta + 9 \cos^2 \theta = 9$ ، پس داریم:

$$9 + 7 \cos^2 \theta + 24 \sin \theta \cos \theta = 4 \Rightarrow 7 \cos^2 \theta + 24 \sin \theta \cos \theta = -5$$

گام سوم: حالا برای رسیدن به تانژانت، بر $\cos^2 \theta$ تقسیم می کنیم:

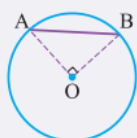
$$\xrightarrow{\div \cos^2 \theta} 7 + 24 \tan \theta = \frac{-5}{\cos^2 \theta} = -5(1 + \tan^2 \theta)$$

$$\Rightarrow 5 \tan^2 \theta + 24 \tan \theta = -12$$

گام چهارم: حالا با ضرب دو طرف در $\cot \theta$ به $5 \tan \theta + 12 \cot \theta$ می رسیم:

$$\xrightarrow{\times \cot \theta} 5 \tan \theta + 24 = -12 \cot \theta \Rightarrow 5 \tan \theta + 12 \cot \theta = -24$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



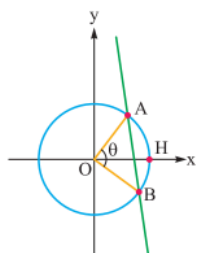
نکته اگر طول وتر AB در دایره $\sqrt{2}$ برابر طول شعاع دایره باشد، زاویه کمان $\widehat{AB}$ قائمه است:

$$AB = \sqrt{2}r \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$$

گام اول: اول فرض می‌کنیم $\widehat{HOA} = \hat{\theta}$ است، پس مختصات A به صورت $A(\cos \theta, \sin \theta)$ می‌شود.

حالا طبق نکته بالا، $\widehat{AOB} = 90^\circ$ است، پس:

$$\widehat{HOB} = \widehat{AOB} - \widehat{AOH} = 90^\circ - \theta$$



گام دوم: حالا چون B در ربع چهارم است، برای رسیدن به B باید از A، 90° درجه به عقب برگردیم، پس زاویه‌ای که B دارد $\theta - 90^\circ$ است.

گام سوم: مختصات نقطه B به صورت $B(\cos(\theta - 90^\circ), \sin(\theta - 90^\circ))$ یا همان $B(\sin \theta, -\cos \theta)$ می‌شود.

$$\text{شیب: } \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\sin \theta - (-\cos \theta)}{\cos \theta - \sin \theta} = -\gamma$$

گام چهارم: شیب خط گذرنده از A و B برابر $-\gamma$ است، پس:

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = -\gamma \Rightarrow \sin \theta + \cos \theta = -\gamma \cos \theta + \gamma \sin \theta$$

$$\Rightarrow 8 \cos \theta = 6 \sin \theta \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan \theta = \frac{4}{3}$$

گام پنجم: $\tan \theta = \frac{4}{3}$ است، پس $\sin \theta = \frac{4}{5}$ و $\cos \theta = \frac{3}{5}$ می‌شود.

$$A(\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

حالا معادله خط گذرنده از A را می‌نویسیم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - \frac{4}{5} = -\gamma(x - \frac{3}{5})$$

$$\Rightarrow y = -\gamma x + 5$$

بنابراین عرض از مبدأ خط 5 است.

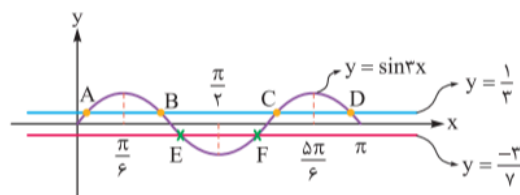
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: اگر به جای $\sin 3x$ مثلاً t بنویسیم، داریم:

$$21t^2 + 2t - 3 = 0 \xrightarrow{\text{روسی}} t^2 + 2t - 63 = 0 \Rightarrow (t+9)(t-7) = 0 \Rightarrow t = -\frac{9}{21}, \frac{7}{21}$$

$$\sin 3x = -\frac{3}{7} \text{ یا } \frac{1}{3}$$

گام دوم: روی نمودار $y = \sin 3x$ در فاصله $[0, \pi]$ تلاقی با $y = \frac{1}{3}$ و $y = -\frac{3}{7}$ را ببینید:



داریم:

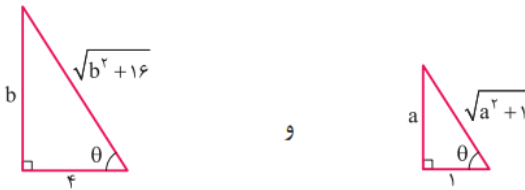
$$x_A + x_B = 2 \times \frac{\pi}{6}, \quad x_E + x_F = 2 \times \frac{\pi}{6}, \quad x_C + x_D = 2 \times \frac{5\pi}{6}$$

پس جمع جواب‌ها می‌شود 3π .

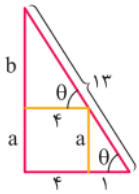
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۸۰

گام اول: تعریف $\sin \theta$ یادتان هست؟ ضلع مقابل وتر بود. پس الان دوتا مثلث داریم:



و



گام دوم: از صورت سؤال مجموع طول وترها ۱۳ است؛ پس:

یعنی با رسم دو مثلث طوری که وترشان در یک امتداد باشد به مثلث قائم الزاویه با وتر ۱۳ و ضلع کوچک ۵ می‌رسیم.

گام سوم:

$$13^2 = 5^2 + (a + b)^2$$

$$\Rightarrow (a + b) = 12 \Rightarrow \tan \theta = \frac{12}{5} = 2.4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۸۱

گام اول: ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

با روابط $\sin^6 x + \cos^6 x$ و $\sin^4 x + \cos^4 x$ داریم:

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^6 x + \cos^6 x$$

$$f(x) = 1 + 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x + 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$f(x) = 3 - 4\sin^2 x \cos^2 x \Rightarrow f(x) = 3 - \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

$$3 - \frac{1}{4} \times 1 \leq f(x) \leq 3 - 0$$

گام دوم: می‌دانیم دوره تناوب $\sin^2 ax$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس $T = \frac{\pi}{2}$.

و از طرفی چون $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$ است، داریم:

$$f_{\min} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۸۲

گام اول: به جای $\sin^2 x$ می‌نویسیم $1 - \cos^2 x$ و ضابطه را مربع کامل می‌کنیم:

$$f(x) = \cos^4 x - \cos^2 x + 1 = (\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

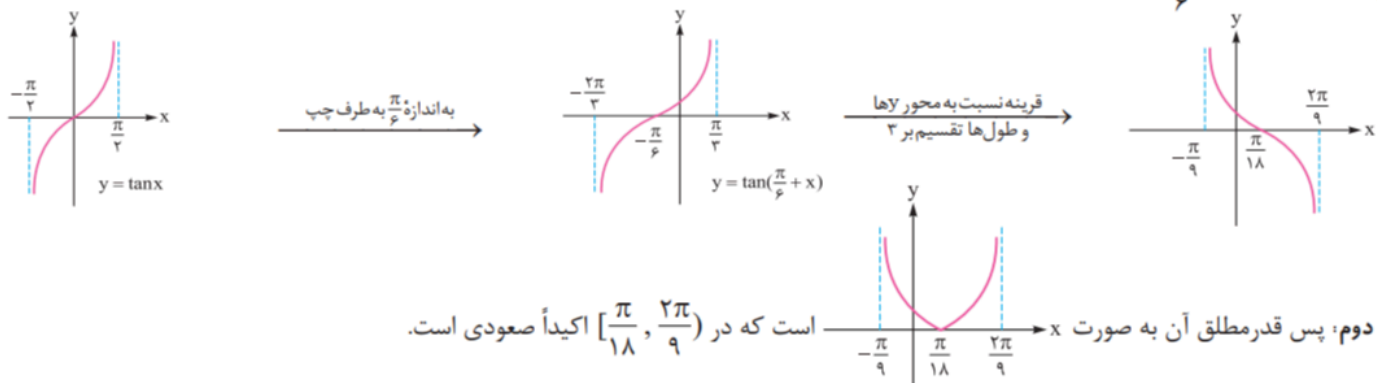
گام دوم: اگر $f(x) = \frac{3}{4}$ باشد، باید داخل پرانتز صفر شود؛ پس $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ و بنابراین $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

گام سوم: جواب‌های کلی معادله $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ به صورت $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ هستند و در فاصله $[0, 2\pi]$ به $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ می‌رسیم. یعنی در این بازه ۶ جواب دارد. دقت کنید که $3\pi + \frac{\pi}{4}$ می‌شود تقریباً 9.78 که از 2π بیشتر است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۸۳

گام اول: نمودار $y = \tan(\frac{\pi}{6} - 3x)$ را رسم کنیم:



گام دوم: پس قدرمطلق آن به صورت $[-\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{9}]$ اکیدا صعودی است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۸۴

گام اول: با حذف مخرج‌ها داریم:

$$2\sin x - 1 \neq 0 \Rightarrow \cos 5x = -\sin 2x = \sin(-2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$\begin{cases} 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2x \\ 5x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (4k+1)\frac{\pi}{6} \\ 7x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(4k-1)\pi}{14} \end{cases}$$

گام دوم: جواب کلی معادله را می‌نویسیم:

در فاصله $(0, \pi)$ جواب‌های $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ از بالای و $\frac{3\pi}{14}$ و $\frac{7\pi}{14}$ از پایینی را داریم.گام سوم: اما به ازای $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ مخرج صفر است؛ پس فقط ۳ جواب داریم که جمعشان $\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{14}(11+7+3)$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۸۵

گام اول: با رابطه $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ ضابطه $f(x)$ را ساده‌تر کنیم:

$$4(\underbrace{2\sin x \cos x}_{\sin 2x}) \cos 2x \cos 4x = 2(\underbrace{2\sin 2x \cos 2x}_{\sin 4x}) \cos 4x = \sin 8x \Rightarrow f(x) = 1 + \sin 8x$$

گام دوم: بنابراین تابع $y = a \cos bx + c$ به صورت $1 + \cos 8x$ است که باید با f برخورد کند:

$$\xrightarrow{\text{برخورد}} 1 + \sin 8x = 1 + \cos 8x \Rightarrow \sin 8x = \cos 8x$$

$$\Rightarrow \tan 8x = 1 \Rightarrow 8x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{32} = \frac{(4k+1)\pi}{32}$$

گام سوم: جواب معادله مثلثاتی را می‌نویسیم:

که به ازای $k = 0, 1, 2, 3$ ، چهار برخورد در فاصله $(0, \frac{\pi}{4})$ داریم.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$x = -\frac{\pi}{4}$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + m$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 + m \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

اکنون به‌ازای $m = -\frac{1}{2}$ ، معادله را حل می‌کنیم:

$$\sin x \cos x = \cos^2 2x - \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} 2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 2x - 1 \Rightarrow \sin 2x = \cos 4x$$

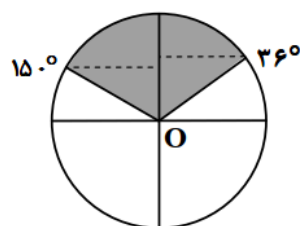
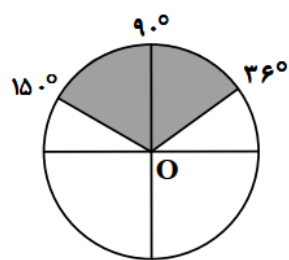
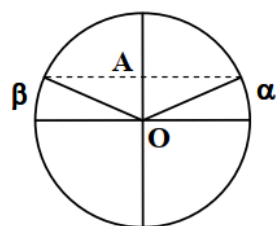
$$\Rightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{بنابراین جواب‌های کلی معادله مثلثاتی به صورت } \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \text{ بوده و جواب‌های موجود در بازه } [0, \pi], \text{ برابر } \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4} \right\} \text{ است.}$$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi + 5\pi + 9\pi}{12} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

نکته: اگر دو زاویه مکمل هم باشند؛ یعنی $\alpha + \beta = 90^\circ$ ، آنگاه:

$$OA = \sin \alpha = \sin \beta$$

$$12^\circ < x \leq 50^\circ \Rightarrow 36^\circ < 2x \leq 100^\circ$$

با توجه به شکل مشاهده می‌شود مقدار $\sin 2x$ از عدد $a = \sin 36^\circ$ شروع می‌شود و در $x = 90^\circ$ به بیشترین مقدار خود یعنی $\sin 90^\circ = 1$ می‌رسد و بعد از آن کاهش پیدا می‌کند تا به

مقدار $b = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ می‌رسد. $(\sin(150^\circ) = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2})$ چون

$\sin 150^\circ < \sin 36^\circ$ است، بنابراین در این بازه حداکثر مقدار $\sin 2x$ برابر ۱ و حداقل آن برابر

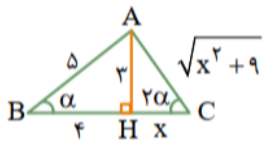
$\frac{1}{2}$ می‌باشد.

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2} \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{m-2} \leq 1, m \neq 2$$

چون هر دو طرف نامعادله مثبت است، پس طرفین را معکوس می‌کنیم و جهت عوض می‌شود:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{m-2} \leq 1 \Rightarrow 2 \geq m-2 \geq 1 \Rightarrow m \in [3, 4] \Rightarrow \text{شامل دو عدد طبیعی است.}$$



$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{16}{25} \Rightarrow 625x^2 = 49(x^2+9)$$

$$\Rightarrow 576x^2 = 49 \times 9 \Rightarrow 24x = 7 \times 3 \Rightarrow x = \frac{7}{8}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$y = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha)^2 - 2 \tan^2 \alpha \cot^2 \alpha = (\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha)^2 - 2$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 2 \Rightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 = 2 \Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha = \pm \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \pm \sqrt{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

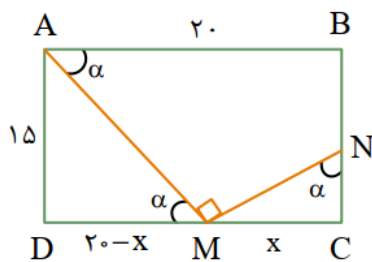
(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan \alpha = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

شیب خط $m = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ و خط از A عبور کرده است.

$$y = -\sqrt{\frac{1}{3}}x + 1 \Rightarrow k = 1$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



$$\tan \alpha = \frac{15}{20-x} = \frac{x}{5/6}$$

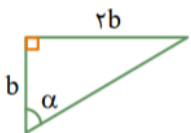
$$\Rightarrow 20x - x^2 = 15 \times 5 / 6 = 12.5$$

$$\Rightarrow x^2 - 20x + 12.5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x-14) = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{15}{20-6} = \frac{15}{14}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

زوایای برابر α را مشخص می‌کنیم:

$$d^2 = a^2 + b^2 = 2/\Delta ab = \frac{2}{b} ab \Rightarrow 2a^2 - \Delta ab + 2b^2 = 0 \Rightarrow (a-2b)(2a-b) = 0$$

$$a > b \Rightarrow a = 2b$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{\Delta}b} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{\Delta} - 1 = -\frac{1}{\Delta}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۹۳

$$\max = \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{a - \sqrt{b}} \Rightarrow \sqrt{b} = a$$

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{a}{b}\right|} = 2\left|\frac{b}{a}\right|\pi = \frac{\pi}{2}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۹۴

تابع f نزولی است، پس $a > 0$ است. در $x = \frac{2}{3}$ مقدار $\cos \frac{\pi}{a} x$ برابر صفر است.

$$\cos\left(\frac{\pi}{a} \times \frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{3a} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{a} x_B\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{a} \times x_B = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_B = -\frac{a}{2} = -\frac{2}{3}$$

$$y_A = f(0) = a = \frac{4}{3}$$

$$m_{AB} = \frac{y_A}{|x_B|} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۹۵

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin^2 x - 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{11\pi}{6}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

